H. A. LORENTZ

DIE MAXWELLSCHE THEORIE

VORLESUNGEN V

LEIPZIG
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT m. b. H.

Uppsala Universitets Bibliotek

Fysik
Telm.

UNIV.-BIBL.
UPPSALA

VORLESUNGEN
ÜBER
THEORETISCHE PHYSIK
AN DER
UNIVERSITÄT LEIDEN

VON

PROF. DR. H. A. LORENTZ

BAND V

DIE MAXWELLSCHE THEORIE
(1900—1902)

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H., LEIPZIG
1931

DIE MAXWELLSCHE THEORIE

(1900—1902)

BEARBEITET VON

DR. K. BREMEKAMP

ÜBERSETZT VON

DR. H. STÜCKLEN

MIT 26 TEXTFIGUREN

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M.B.H., LEIPZIG

1931

Druck von C. Schulze & Co., G. m. b. H., Gräfenhainichen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Mathematische Hilfssätze.

Seite

Vektoren 1
Felder 6
Der Gausssche Satz 10
Solenoidale Vektoren 18
Der Potentialvektor 21
Der Stokessche Satz 26
Die Laplacesche Gleichung 28
Der Greensche Satz 30
Erläuterung des Raumintegrals in Gleichung (29) 33
Die Poissonsche Gleichung 37

Kapitel I

Die Vektoren des elektromagnetischen Feldes.

§ 1. Der elektrische Strom 41
§ 2. Die magnetische Kraft 43
§ 3. Die magnetische Kraft, die durch einen geschlossenen Stromkreis hervorgerufen wird 44
§ 4. Ableitung der ersten Maxwellschen Gleichung 50
§ 5. Magnetisierbare Substanzen 55
§ 6. Die magnetische Induktion 59
§ 7. Die elektrische Kraft 62
§ 8. Die dielektrische Verschiebung 63
§ 9. Die zweite Maxwellsche Gleichung 65
§ 10. Die elektromotorische Kraft 67
§ 11. Wahl der Einheiten 67
§ 12. Zusammenfassung 74

Kapitel II

Elektrostatik.

§ 1. Die Problemstellung in der Elektrostatik 77
§ 2. Beispiele 79

Seite

§ 3. Die Theorie der elektrischen Bilder 88
§ 4. Die Methode der Inversion 94
§ 5. Die Energie im elektrostatischen Feld 100
§ 6. Sätze über das Energie-Minimum 102
§ 7. Ponderomotorische Kräfte 105
§ 8. Mehrere Dielektrika 107
§ 9. Die dielektrische Anziehung 112
§ 10. Beliebige Systeme von Leitern 115
§ 11. Die Ladung auf einem Isolator 118

Kapitel III

Stationäre Ströme.

§ 1. Einleitung 119
§ 2. Das OHMsche Gesetz 121
§ 3. Das elektrische Feld um einen Stromleiter 124
§ 4. Die KIRCHHOFFschen Gesetze 126
§ 5. Die Wärmeentwicklung durch den elektrischen Strom . . . 129
§ 6. Energiebetrachtungen 135
§ 7. Der Strom im dreidimensionalen Raum 138

Kapitel IV

Induktionsströme.

§ 1. Selbstinduktion 144
§ 2. Willkürlich gegebene elektromotorische Kräfte 148
§ 3. Gegeninduktion 149
§ 4. Mehrere Stromkreise 154
§ 5. Versuche über Extraströme 155
§ 6. Stromkreise mit Kondensator 159
§ 7. Stromkreise mit Kondensator und elektromotorischer Kraft 162
§ 8. Zwei Stromkreise 166
§ 9. Der Einfluß der Drahtdicke auf den Selbstinduktionskoeffizienten 168
§ 10. Berechnung des Magnetfeldes in einfachen Fällen 169
§ 11. Ringförmige Spule 173
§ 12. Die Gegeninduktion zwischen den Spulen eines Induktoriums 175
§ 13. Die Induktion bei Bewegung eines Leiters 176

Kapitel V

Die Energie im elektromagnetischen Feld.

§ 1. Die allgemeine Gleichung 179
§ 2. Beispiele 181

Seite
§ 3. Der Poyntingsche Energiestrom 183
§ 4. Ein einfaches Beispiel 184

Kapitel VII

Die elektromagnetische Lichttheorie

§ 1. Der freie Äther 187
§ 2. Isotrope Dielektrika 191
§ 3. Reflexion und Brechung 192

Register 198

Mathematische Hilfssätze.

Vektoren.

Zur Beschreibung der physikalischen Erscheinungen werden wir zwei verschiedenartige Größen gebrauchen, solche, die durch eine einzige Zahl angegeben werden können, — falls die Einheiten für diese Zahlen erst einmal festgelegt sind, — und solche, zu deren Bestimmung sowohl eine Maßzahl als auch eine Richtung notwendig ist. Die ersteren nennen wir skalare Größen, die letzteren Vektoren. Ein Vektor läßt sich durch eine Gerade von gegebener Richtung und Länge darstellen.

Ein Vektor ist bestimmt, wenn seine Projektionen auf drei zueinander senkrechte Achsen gegeben sind. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem wollen wir dabei in folgender Weise einführen: von der positiven Z-Achse aus gesehen soll eine Drehung von der positiven X-Achse aus um einen Winkel von 90^0 nach der positiven Y-Achse hin im Gegensinn des Uhrzeigers verlaufen. Diese gleiche Definition werden wir später benutzen, wenn wir von der Richtung eines Lotes auf einer Fläche sprechen, die einem bestimmten Drehsinn auf der Fläche entspricht.

Wenn der Buchstabe A einen Vektor bedeutet, so werden wir im folgenden die Projektionen des Vektors auf die Koordinatenachsen OX, OY, OZ durch A_x, A_y, A_z bezeichnen. In analoger Weise nennen wir A_h die Projektion auf eine beliebige Richtung h. Wir werden auch oft sagen, A_h sei die Komponente von A in der Richtung h.

Zunächst wollen wir noch einige Schreibweisen und Rechenoperationen kennen lernen, durch die es möglich sein wird, Beziehungen zwischen Vektoren aufzuschreiben, ohne von den drei Projektionen Gebrauch zu machen. Hierdurch wird es in vielen Fällen

gelingen, eine Beziehung durch eine Gleichung (Vektorgleichung) auszudrücken, wozu im anderen Falle drei nötig wären.

Durch die bekannte Konstruktion der Vektoraddition leiten wir aus mehreren gegebenen Vektoren einen Vektor ab, der Resultante genannt wird. Genau wie bei der Addition von Zahlen ist das Resultat unabhängig von der Reihenfolge, in der die einzelnen Elemente benutzt werden. Haben die zu addierenden Vektoren alle die gleiche Richtung, so geht die Vektoraddition in eine gewöhnliche Summation über. Auch wenn dies nicht der Fall ist, sprechen wir von einer Vektorsumme und deuten die Operation durch das Zeichen + an. Sind die zu addierenden Vektoren A, B, usf., und ist R die Resultante, so gilt:

$$R = A + B + \cdots \tag{1}$$

Dies ist eine Vektorgleichung, sie ist gleichbedeutend mit den drei gewöhnlichen Gleichungen:

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x + \cdots \\ R_y &= A_y + B_y + \cdots \\ R_z &= A_z + B_z + \cdots \end{aligned}$$

Wir gelangen ebenso zur Definition einer Vektordifferenz, die gegeben ist durch die Gleichung

$$A - B = C,$$

und die die gleiche Beziehung zwischen den Vektoren ausdrückt, wie

$$A = B + C.$$

Das Produkt zweier Vektoren werden wir auf zwei verschiedene Weisen definieren und demgemäß auch zwei verschiedene Resultate erhalten. Die eine Definition liefert uns eine skalare Größe, die andere einen Vektor.

Das skalare Produkt zweier Vektoren A und B bezeichnen wir durch $(A \cdot B)$; es ist definiert als das Produkt der beiden Zahlen, die die absoluten Beträge der zwei Vektoren angeben, multipliziert mit dem Cosinus des Winkels α, den sie einschließen; oder anders ausgedrückt: das skalare Produkt erhält man durch Multiplikation der Größe des einen Vektors mit der Größe der — positiv oder negativ gerechneten — Projektion des zweiten Vektors auf diesen ersten. Beträgt der Winkel α zwischen den Vektoren 90°, so ist das skalare Produkt gleich Null; fallen die Richtungen der Vektoren zusammen,

d. h. ist $\alpha = 0$, so hat das skalare Produkt ein Maximum. Das skalare Produkt läßt sich leicht mit Hilfe der Projektionen beider Vektoren berechnen. Wir finden:

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{2}$$

Für das skalare Produkt gilt das kommutative Gesetz, ausgedrückt durch

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Ist einer der Vektoren eine Vektorsumme, so gilt auch das distributive Gesetz

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}). \tag{4}$$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ stellen wir durch das Symbol $[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$ dar; $[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$ ist ein Vektor, der senkrecht zur Ebene der gegebenen Vektoren steht und nach der Seite weist, die einer Drehung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über den überstumpfen Winkel im Gegensinn des Uhrzeigers entspricht; seine Länge ist zahlenmäßig gleich der Anzahl Flächenelemente in einem Parallelogramm, das aus den gegebenen Vektoren konstruiert werden kann. Der numerische Betrag ist also gleich dem Produkt der Längen beider Vektoren multipliziert mit $\sin \alpha$. Das Vektorprodukt ist danach 0, wenn die Richtungen der gegebenen Vektoren zusammenfallen, d. h. dann, wenn das skalare Produkt ein Maximum hat, und es ist am größten, wenn die gegebenen Vektoren senkrecht aufeinander stehen, wenn also das skalare Produkt verschwindet. Für das Vektorprodukt gilt *nicht* das kommutative Gesetz, vielmehr ist laut Definition:

$$[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}]. \tag{5}$$

Das distributive Gesetz bleibt erhalten:

$$[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}], \tag{6}$$

und

$$[\mathfrak{B} + \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}] = [\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}] + [\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}], \tag{7}$$

wie aus einer einfachen stereometrischen Betrachtung ohne weiteres zu ersehen ist. Wendet man dieses Gesetz auf das Produkt $[A_x + A_y + A_z \cdot B_x + B_y + B_z]$ an, so ergibt sich für die Komponenten von $[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$ in den Richtungen der Achsen:

$$\begin{aligned} &A_y B_z - A_z B_y, \\ &A_z B_x - A_x B_z, \\ &A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \tag{8}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke läßt sich leicht verifizieren:

$$([\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}] \cdot \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cdot [\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}]); \tag{9}$$

Beide Seiten der Gleichung stellen die Anzahl Raumelemente desjenigen Parallepipedons dar, das die drei Vektoren zu Kanten hat. Aus (9) folgt weiter:

$$(\mathfrak{A} \cdot [\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]) = 0, \tag{10}$$

was auch direkt aus den Definitionen abgeleitet werden kann.

Aus der Mechanik kennen wir folgenden Satz: wirken auf einen festen Körper beliebig viele Kräfte, so lassen sich Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt durch ihre Resultierende ersetzen, ferner darf man zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte zufügen oder fortnehmen. Systeme von Kräften, die mit Hilfe dieser Operation auseinander abgeleitet werden, nennt man äquivalent. Wir können nun beweisen, daß ein beliebiges System von Kräften äquivalent einer einzelnen Kraft und einem Kräftepaar ist. Wählen wir einen beliebigen Punkt O als Koordinatenanfangspunkt, und sei $\mathfrak{A}$ eine unserer Kräfte, so bringen wir in O eine Kraft $\mathfrak{A}_1$ an, die gleich und parallel mit $\mathfrak{A}$ ist, und eine zweite Kraft $\mathfrak{A}_2$ gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung. Die Kraft $\mathfrak{A}$ ist dann äquivalent dem System $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, und hierin bilden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_2$ ein Kräftepaar. Den Hebelarm dieses Kräftepaares, $\mathfrak{r}$, d. h. das Lot von O auf $\mathfrak{A}$ können wir wieder als einen Vektor ansehen. Das Moment des Kräftepaares wird gegeben durch das Vektorprodukt

$$[\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}], \tag{11}$$

wobei man unter $\mathfrak{r}$ auch einen Vektor verstehen kann, der von O nach einem beliebigen Punkt von $\mathfrak{A}$ gezogen ist.

In der elementaren Theorie wird abgeleitet, daß Kräftepaare von gleichem Moment einander äquivalent sind, und daß mehrere Kräftepaare durch ein einziges ersetzt werden können, dessen Moment gleich der Resultierenden der Einzelmomente ist.

Verfahren wir nun mit allen Kräften unseres Systems in gleicher Weise wie mit $\mathfrak{A}$, so wird das System einer Anzahl von Kräften äquivalent, die alle in O angreifen und sich zu einer Resultierenden zusammensetzen lassen, und einer Summe von Kräftepaaren, die ebenfalls durch ein einzelnes Kräftepaar ersetzt werden können.

Nennen wir die Projektionen der einzelnen Kräfte auf die Koordinatenachsen X_k, Y_k, Z_k ($k = 1, 2, 3 \ldots$) und die Koordinaten ihrer Angriffspunkte x_k, y_k, z_k, so sind die Komponenten der resultierenden Kraft

$$X = \Sigma X_k, \qquad Y = \Sigma Y_k, \qquad Z = \Sigma Z_k. \tag{12}$$

Für das Moment des resultierenden Kräftepaares ergibt sich

$$\begin{aligned} L &= \Sigma (y_k Z_k - z_k Y_k), \qquad M = \Sigma (z_k X_k - x_k Z_k), \\ N &= \Sigma (x_k Y_k - y_k X_k). \end{aligned} \tag{13}$$

Das resultierende Kräftepaar ist offensichtlich von der Wahl des Koordinatenanfangspunktes abhängig. Hätten wir den Angriffspunkt der Kräfte in den Punkt O' mit den Koordinaten x_o, y_o, z_o in bezug auf O verlegt, so hätten wir ein Moment gefunden:

$$\begin{aligned} L_o &= \Sigma \{(y_k - y_o) Z_k - (z_k - z_o) Y_k\} = L - (y_o Z - z_o Y), \\ M_o &= M - (z_o X - x_o Z), \\ N_o &= N - (x_o Y - y_o X). \end{aligned} \tag{14}$$

Der Vektor (L_o, M_o, N_o) ergibt sich also aus der Zusammensetzung eines Vektors, der gleich und parallel dem Moment in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt ist, und eines zweiten Vektors, der das Moment der im Koordinatenanfangspunkt angreifenden resultierenden Kraft in bezug auf O' wiedergibt.

Auch bei Vektoren, die etwas anderes als Kräfte bedeuten, spricht man vielfach von Resultierenden und von resultierenden Momenten in bezug auf irgendeinen Punkt. Stets sind dann die Gleichungen (12) und (14) anzuwenden, während das Moment eines Vektors in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt durch Gleichung (11) wiedergegeben wird.

Man kann leicht zeigen, daß das skalare Produkt der Resultierenden und des resultierenden Momentes in bezug auf irgendeinen Punkt von der speziellen Lage dieses Punktes unabhängig ist. Aus (12) und (14) finden wir nämlich hierfür:

$$L X + M Y + N Z,$$

woraus folgt, daß das Produkt nicht von x_o, y_o, z_o abhängt.

Dieses Resultat hätten wir auch durch Vektorgleichungen ausdrücken können. Die Resultierende ist

$$\mathrm{R} = \Sigma \mathrm{A}_k$$

und das resultierende Moment in bezug auf O, wenn $\mathfrak{r}_k$ den Vektor von O zum Angriffspunkt (oder einem beliebigen anderen Punkt) von $\mathfrak{A}_k$ bedeutet:

$$\mathfrak{K} = \Sigma [\mathfrak{r}_k \cdot \mathfrak{A}_k].$$

Weiter wird das resultierende Moment in bezug auf O', wenn $\mathfrak{r}_o$ den Vektor $O\,O'$ bedeutet:

$$\mathfrak{K}_o = \Sigma [(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_o) \cdot \mathfrak{A}_k] = \mathfrak{K} - \Sigma [\mathfrak{r}_o \cdot \mathfrak{A}_k] = \mathfrak{K} - [\mathfrak{r}_o \cdot \mathfrak{R}],$$

und das skalare Produkt der Resultierenden mit dem resultierenden Moment nach (10)

$$(\mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{R}) = (\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{R}) - ([\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{R}] \cdot \mathfrak{R}) = (\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{R}).$$

Da auch die Resultierende unabhängig von der Lage von O' ist, so läßt sich der letzte Satz folgendermaßen ausdrücken: die Projektion des resultierenden Momentes auf die Resultierende ist konstant. Das resultierende Moment ist also am kleinsten, wenn der Punkt x_o, y_o, z_o so gewählt wird, daß das resultierende Moment dieselbe Richtung wie die Resultierende hat. Nach (14) muß dazu sein:

$$\frac{L - (y_o Z - z_o Y)}{X} = \frac{M - (z_o X - x_o Z)}{Y} = \frac{N - (x_o Y - y_o X)}{Z}. \qquad (15)$$

Betrachten wir hierin x_o, y_o, z_o als laufende Koordinaten, so stellen diese Gleichungen eine Gerade dar, die die Achse des Vektorensystems genannt wird.

Felder.

Wir werden im folgenden vielfach sowohl skalare als auch vektorielle Größen zu behandeln haben, die in jedem Punkt eines bestimmten Gebietes einen gegebenen Wert annehmen; wir nennen diese Gesamtheit das Feld dieser Größe, das sich auch über den unendlichen Raum erstrecken kann. Sind die Größen Vektoren, so wird sich im allgemeinen sowohl die Richtung als auch der absolute Wert der Vektoren von Punkt zu Punkt ändern. Die Größe ist überall bekannt, wenn, — im Falle eines Skalars — der Wert selbst, — im Falle eines Vektors — die Projektionen des Vektors auf die Achsen als Funktion der Koordinaten in allen Punkten bekannt sind. Solche Größen nennen wir „Punktfunktionen". Wir wollen jetzt erläutern, was man für eine skalare Größe Φ unter dem Differentialquotienten

in einer bestimmten Richtung h versteht. Wir betrachten dazu den Wert von Φ in einem Punkt P und in einem Punkt P', der so gelegen ist, daß $P\,P' = \Delta\,h$ die gegebene Richtung h besitzt. Dann wird

$$\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,h} = \lim_{\Delta\,h = 0} \frac{\Phi_{P'} - \Phi_P}{\Delta\,h},$$

falls dieser Grenzwert besteht, der Differentialquotient von Φ im Punkte P nach der Richtung h genannt. Offensichtlich sind die gewöhnlichen, partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}$, $\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}$, $\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,z}$ nur Spezialfälle des allgemeineren Ausdrucks. Auch Vektorkomponenten werden wir oft in dieser Art zu differenzieren haben; wir behandeln sie dabei als skalare Größen.

Nehmen wir an, im Feld einer skalaren Größe Φ, das sich sowohl über den zwei- als auch über den dreidimensionalen Raum erstrecken kann, sei zwischen zwei Punkte A und B eine Kurve gelegt, und denken wir uns die Kurve in willkürlicher Weise in Elemente zerlegt, deren Länge wir mit $\Delta\,s$ bezeichnen. Wählen wir nun weiter in jedem Element einen Punkt und multiplizieren den Wert, den die betrachtete Größe in dem Punkt hat, mit $\Delta\,s$, so können wir, ebenso wie bei der gewöhnlichen Integration, zeigen, daß der Ausdruck

$$\Sigma\,\Phi\,\Delta\,s$$

— wobei die Summe über alle Elemente der betrachteten Kurve zu erstrecken ist, — sich einem bestimmten Grenzwert nähert, wenn wir die Elemente $\Delta\,s$ kleiner und entsprechend ihre Anzahl größer werden lassen (wenigstens unter bestimmten Voraussetzungen für die Funktion Φ und die Kurve $A\,B$, die aber bei physikalischen Problemen stets erfüllt sind). Diesen Grenzwert nennen wir das Linienintegral der Funktion Φ über die betrachtete Kurve und drücken ihn aus durch das Zeichen

$$\int_A^B \Phi\,d\,s,$$

wobei gegebenenfalls der Integrationsweg noch besonders angegeben werden muß.

Wir sprechen auch von dem Linienintegral eines Vektors A und werden gerade diesem bei unseren Untersuchungen oft begegnen.

Wir können es in der gleichen Weise definieren, wenn wir uns die Kurve in einer bestimmten Richtung durchlaufen denken, z. B. von A nach B, und für jedes Element des Integrals das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{A}$ und Δs, oder, was dasselbe bedeutet, das Produkt von Δs mit der Projektion von $\mathfrak{A}$ auf die Tangente in dem betrachteten Punkte bilden. Wir bezeichnen das Linienintegral dann auch durch

$$\int_A^B \mathfrak{A}_s \, ds,$$

wobei der Index s die Richtung des Kurvenelementes, oder, was dasselbe ist, die Richtung der Tangente angibt. Es ist klar, daß das Linienintegral das Vorzeichen wechselt, wenn die Kurve in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Mit Hilfe der Vektorkomponenten in den Richtungen der Achsen können wir dieses Integral umformen in:

$$\int_A^B \left(\mathfrak{A}_x \frac{dx}{ds} + \mathfrak{A}_y \frac{dy}{ds} + \mathfrak{A}_z \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\int_A^B (\mathfrak{A}_x \, dx + \mathfrak{A}_y \, dy + \mathfrak{A}_z \, dz).$$

Der Integrationsweg kann auch eine geschlossene Kurve sein, und wir brauchen für diesen Fall an unseren Definitionen nichts zu ändern.

In gleicher Weise definieren wir ein Oberflächenintegral. Wir müssen hierbei den Fall einer geschlossenen Fläche von dem einer Fläche mit Rand unterscheiden. Unter dem Oberflächenintegral einer skalaren Größe Φ verstehen wir den Grenzwert des Ausdrucks

$$\Sigma \Phi \Delta \sigma,$$

wobei $\Delta \sigma$ ein Oberflächenelement und Φ den Wert der Funktion in einem Punkt des Elementes bedeutet. In der Integralrechnung wird bewiesen, daß sich auch hier (wieder unter bestimmten Voraussetzungen) der Ausdruck einem bestimmten Grenzwert nähert, unabhängig davon, wie die Oberflächenelemente ursprünglich gewählt sind und in welcher Weise wir sie unendlich klein werden

lassen. In analoger Weise definieren wir weiter das Oberflächenintegral eines Vektors A. Dabei wählen wir zum Element des Integrals das skalare Produkt des Vektors A mit einem Vektor in Richtung der Normalen zur Oberfläche, dessen Größe durch den Zahlenwert von $d\sigma$ angegeben wird, oder anders ausgedrückt, wir bilden das Produkt von $d\sigma$ und der Projektion von A auf die Normale. Das Oberflächenintegral wird dargestellt durch:

$$\int \mathfrak{A}_n d\sigma.$$

Unsere Definition ist aber noch nicht eindeutig, solange wir nicht festgesetzt haben, was unter der positiven Richtung der Normalen zu verstehen ist. Wenn die Fläche geschlossen ist, so können wir leicht zwischen den beiden Seiten der Fläche, der inneren und der äußeren, unterscheiden. Wir wollen die Normale positiv zählen, **wenn sie nach außen weist.**

Bei den Flächen, die in einer Randkurve endigen, wollen wir uns auf diejenigen beschränken, bei denen die zwei Seiten in folgender Weise zu unterscheiden sind: wenn wir uns auf der einen Seite der Fläche bewegen, so sollen wir die andere nicht erreichen können, ohne den Rand zu überschreiten. Für eine der zwei Seiten soll dann die Normale die positive Richtung besitzen. Für die andere muß das Oberflächenintegral das Vorzeichen wechseln.

Haben wir für die Randkurve einen bestimmten positiven Richtungssinn festgesetzt, so können wir auch die nach der Definition auf S. 1 entsprechende Richtung der Normalen als die positive ansehen. Wir brauchen sie naturgemäß nur für ein Element zu bestimmen, da sie damit auch für die ganze Oberfläche festgelegt ist. Nehmen wir ein Oberflächenelement, dessen Begrenzung zum Teil durch die Randkurve gebildet wird, und bestimmen wir auf ihm an der Seite, wo es mit der Randkurve zusammenfällt, einen Richtungssinn, so ist, wenn das Oberflächenelement nur klein genug ist, die Richtung der Normalen, die diesem Richtungssinn entspricht, gegeben, und diese bezeichnen wir für unsere Oberfläche als positiv.

Wir können das Oberflächenintegral leicht mit Hilfe der Vektorkomponenten in Richtung der Achsen ausdrücken. Denn es ergibt sich, wenn wir die Winkel, die A mit den Achsen bildet, mit $(\mathfrak{A}\, x)$ usf. bezeichnen und ebenso die Winkel zwischen der Oberflächennormale und den Achsen $(n\, x)$ usf. nennen:

$$\int \mathfrak{A}_n \, d\sigma = \int \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{A}\, n)\, d\sigma = \int \mathfrak{A} \{\cos(\mathfrak{A}\, x)\cos(n\, x) + \cos(\mathfrak{A}\, y)\cos(n\, y) + \cos(\mathfrak{A}\, z)\cos(n\, z)\}\, d\sigma =$$
$$\int \{\mathfrak{A}_x \cos(n\, x) + \mathfrak{A}_y \cos(n\, y) + \mathfrak{A}_z \cos(n\, z)\}\, d\sigma .$$

In ganz analoger Weise läßt sich das Raumintegral definieren. Dabei treten im allgemeinen keine Vektoren auf. Das Raumintegral einer Größe Φ, gebildet für den Raum innerhalb einer gegebenen Fläche, wird bezeichnet mit

$$\int \Phi \, dS,$$

wobei gegebenenfalls der Raum, über den das Integral erstreckt werden soll, beim Integralzeichen angegeben werden muß. Auch hierbei ist der Wert des Integrals unabhängig von der Wahl der Raumelemente. Wir werden im folgenden eine Reihe von Sätzen besprechen, die uns die Beziehungen zwischen einigen Raumintegralen und Oberflächenintegralen einerseits, und zwischen einigen Oberflächenintegralen und Linienintegralen andererseits, zeigen werden.

Der Gausssche Satz.

Betrachten wir zunächst das Integral

$$\int \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} \, dS,$$

erstreckt über den Raum innerhalb einer geschlossenen Oberfläche σ. Wir wollen voraussetzen, daß die Komponenten von $\mathfrak{A}$ innerhalb und auf der Oberfläche endlich und stetig sind und außerdem innerhalb der Oberflächen endliche und stetige Ableitungen besitzen. Es ist für unsere Betrachtungen ganz gleichgültig, ob der Vektor $\mathfrak{A}$ außerhalb der Oberfläche definiert ist, und falls ja, welche Werte er dort annimmt. Wir brauchen z. B. auch nicht die Möglichkeit auszuschließen, daß die Komponente $\mathfrak{A}_x$ einen endlichen Sprung macht, falls man die Oberfläche in irgendeinem Punkt durchquert.

Denken wir uns einen Zylinder angebracht, der die Fläche umhüllt und dessen Mantelfläche parallel der X-Achse liegt. Er schneidet die Y-Z-Ebene in einer geschlossenen Kurve. Die Fläche innerhalb dieser Kurve teilen wir in sehr kleine Elemente $d\sigma_x$ und betrachten nun wieder Zylinder, die parallel zur X-Achse liegen und diese Elemente als Basis besitzen. Wir fragen, wieviel der Raum in einem solchen kleinen Zylinder innerhalb der Fläche σ zu unserem

Raumintegral beiträgt. Nehmen wir der Einfachheit halber an, der Zylinder möge die Fläche σ nur zweimal durchstoßen, einmal bei einem Element $d\sigma_1$, das einen Punkt P_1 enthält, und wo wir, wenn wir den Zylinder in Richtung der positiven X-Achse durchlaufen, in die Oberfläche eindringen, und ein anderes Mal beim Element $d\sigma_2$, mit dem Punkt P_2, wo wir wieder austreten. Teilen wir nun den Raum innerhalb des Zylinders zwischen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ in Raumelemente auf dadurch, daß wir Ebenen senkrecht zu seiner Mantelfläche legen, so ist die Größe eines solchen Elementes $d\sigma_x\, dx$, und wir finden für den betrachteten Teil unseres Integrals:

$$d\sigma_x \cdot \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} dx = (\mathfrak{A}_{x_2} - \mathfrak{A}_{x_1})\, d\sigma_x,$$

wobei $\mathfrak{A}_{x_2}$ und $\mathfrak{A}_{x_1}$ die Werte von $\mathfrak{A}_x$ in den Punkten P_2 und P_1 der Oberfläche angibt.

Bezeichnen wir nun die Richtung der nach außen gezogenen Normalen zur Oberfläche in P_2 mit n_2 und in P_1 mit n_1, so ist, da der Winkel $(n_1\, x)$ stumpf und der Winkel $(n_2\, x)$ spitz ist,

$$d\sigma_x = d\sigma_2 \cos(n_2\, x) = -d\sigma_1 \cos(n_1\, x).$$

Der betrachtete kleine Zylinder liefert also zu unserem Integral den Beitrag

$$\mathfrak{A}_{x_2} \cos(n_2\, x)\, d\sigma_2 + \mathfrak{A}_{x_1} \cos(n_1\, x)\, d\sigma_1;$$

hieraus folgt weiter, daß wir das ganze Raumintegral ersetzen können durch

$$\int \mathfrak{A}_x \cos(n\, x)\, d\sigma,$$

erstreckt über die ganze Fläche σ. Man kann ohne weiteres den Beweis für den Fall ergänzen, bei dem einige der Elementarzylinder die Oberfläche mehr als zweimal schneiden. In ganz analoger Weise finden wir:

$$\int \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} dS = \int \mathfrak{A}_y \cos(n\, y)\, d\sigma \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} dS = \int \mathfrak{A}_z \cos(n\, z)\, d\sigma.$$

Durch Addition der drei Gleichungen ergibt sich:

$$\int \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right) dS = \int \{\mathfrak{A}_x \cos(n\, x) + \mathfrak{A}_y \cos(n\, y) + \mathfrak{A}_z \cos(n\, z)\}\, d\sigma,$$

$$= \int \mathfrak{A}_n\, d\sigma. \tag{16}$$

Dies ist der Gauss'sche Satz.

Dieses letzte Integral hat eine wichtige physikalische Bedeutung, wenn der Vektor A in jedem Punkt das Produkt der Geschwindigkeit v einer sich bewegenden Flüssigkeit und der Dichte der Flüssigkeit bedeutet. Es stellt dann die Flüssigkeitsmasse dar, die in der Zeiteinheit durch die Oberfläche σ nach außen strömt. Betrachten wir das Element $d\sigma$ bei einem Punkt P; durch $d\sigma$ fließt während der Zeit dt diejenige Flüssigkeitsmenge, die sich zu Beginn des Zeitelementes in einem schiefen Zylinder mit der Grundfläche $d\sigma$ befand, dessen Achse die Richtung der Geschwindigkeit in P besitzt und dessen Länge $v\,dt$ ist. Der Inhalt des Zylinders beträgt, abgesehen vom Vorzeichen, $v_n\,dt\,d\sigma$ und seine Masse: $\varrho\,v_n\,dt\,d\sigma = \mathfrak{A}_n\,dt\,d\sigma$. Diese Flüssigkeitsmasse strömt durch das Element $d\sigma$ nach außen, wenn $\mathfrak{A}_n$ positiv, und nach innen, wenn $\mathfrak{A}_n$ negativ ist. Wenn wir also die Flüssigkeitsmasse berechnen wollen, die während der Zeit dt durch die Fläche σ nach außen fließt bzw. den Überschuß, der mehr nach außen als nach innen fließt, so müssen wir für jedes Element $d\sigma$ den Beitrag $\mathfrak{A}_n\,d\sigma\,dt$ in Rechnung setzen und finden für die gesamte Fläche

$$dt \cdot \int \mathfrak{A}_n\,d\sigma.$$

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so muß das Integral für jede geschlossene Oberfläche σ verschwinden. Nach Gleichung (16) muß dann auch

$$\int\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right)dS,$$

erstreckt über jeden beliebigen Raum, den die betrachtete Flüssigkeit erfüllt, den Wert 0 haben; dies ist allein möglich, wenn für jeden Punkt $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}=0$ ist.

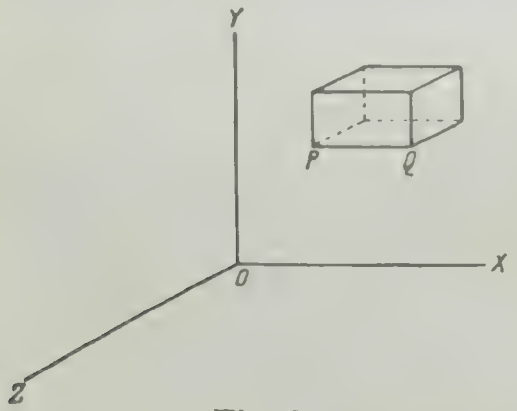

Fig. 1.

Diese letzte Aussage läßt sich auch in anderer Art beweisen. Wir betrachten zu diesem Zweck ein sehr kleines, rechtwinkliges Parallelopipedon (Fig. 1), dessen Kanten dx, dy, dz parallel den Koordinatenachsen liegen, und fragen nach der Abnahme der Flüssigkeit in dem Parallelopipedon während der Zeit dt.

Ist P ein Punkt der linken Seitenfläche parallel YOZ, Q der entsprechende Punkt auf der rechten Seite, so ist die Flüssigkeitsmenge, die während der Zeit dt von links in das Parallelopipedon hineinströmt, $A_{xP}\,dt\,dy\,dz$, und die Menge, die durch die rechte Seite herausströmt, $A_{xQ}\,dt\,dy\,dz$. Infolge der Strömung durch die beiden Seitenflächen vermindert sich also die Flüssigkeitsmenge im Parallelopipedon um

$$(A_{xQ} - A_{xP})\,dt\,dy\,dz = \frac{\partial A_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

In gleicher Weise ergibt sich die Flüssigkeitsabnahme als Folge der Strömung durch die Grund- und Deckfläche zu

$$\frac{\partial A_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

und durch die Vorder- und Rückfläche zu

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

also im ganzen zu:

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{dz}\right) dx\,dy\,dz\,dt. \qquad (17)$$

Bei der Ableitung dieses Ausdruckes haben wir z. B. bei Angabe der Flüssigkeitsmenge, die durch die Seitenfläche $dy\,dz$ bei P nach innen strömt, nicht berücksichtigt, daß der Vektor A in verschiedenen Punkten dieses Flächenelementes verschiedene Werte besitzen kann; im Resultat hingegen spielt gerade die Verschiedenheit der Werte des Vektors in Punkten, deren Abstände von der Größenordnung der Abmessungen unseres Parallelopipedons sind, eine Rolle. Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß die Korrektion, die wir an unserer Gleichung anbringen müßten, wenn wir die Veränderlichkeit von A_x in den einzelnen Punkten P der Seitenflächen in Rechnung setzen wollten, nur für Terme höherer Ordnung von Bedeutung ist. Wir müßten dann die Oberfläche $dy\,dz$ in kleinere Elemente $d\sigma$ teilen, die Flüssigkeitsmengen, die durch die Seitenflächen ein- bzw. ausströmen, durch Integration berechnen und die Differenz dieser zwei Integrale einsetzen. Wir erhalten offenbar den gesuchten Ausdruck, wenn wir

$$\frac{\partial A_x}{dx}\,dx\,dt\,d\sigma$$

über die ganze Seitenfläche bei P integrieren. Nach einem bekannten Satz aus der Integralrechnung können wir das Resultat in die Form bringen

$$\left(\frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial x}\right)_{P'} d\,x\,d\,y\,d\,z\,d\,t,$$

wobei P' ein bestimmter Punkt der Seitenfläche ist, der im allgemeinen nicht mit P identisch ist. Nun ist, wenn wir $P\,P' = h$ setzen, h von gleicher Größenordnung wie $d\,x$, $d\,y$ und $d\,z$; wir finden:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial x}\right)_{P'} = \left(\frac{\partial \mathrm{A}_x}{d\,x}\right)_{P} + h \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathrm{A}_x}{\partial h\,\partial x}\right)_{P''},$$

wo P'' einen Punkt zwischen P und P' bedeutet.

In (17) hätten wir also statt $\frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial x}$ die rechte Seite der obigen Gleichung einzusetzen und ebenso analoge Ausdrücke an Stelle von $\frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial z}$ zu schreiben. Man sieht nun aber ohne weiteres, daß hierbei nur Terme zugefügt werden, die (wegen des Faktors h) gegenüber den anderen zu vernachlässigen sind.

Der Ausdruck

$$\frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial z}$$

wird Divergenz des Vektors A genannt und geschrieben div A. Wenn für eine strömende Flüssigkeit A die oben angegebene Bedeutung hat, so drückt div A die Verminderung der Flüssigkeitsmasse pro Zeiteinheit und pro Volumeneinheit aus. Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so muß in jedem Punkt

$$\text{div } \mathrm{A} = 0 \tag{18}$$

sein. Für diesen Fall gilt die Gleichung (18) auch, wenn A nicht das Produkt von Geschwindigkeit und Dichte, sondern die Geschwindigkeit selbst bedeutet.

Die Divergenz eines Vektors ist eine skalare Größe, die in jedem Punkte des Feldes einen bestimmten Wert hat. Wir haben zu ihrer Berechnung ein vorgegebenes Koordinatensystem benutzt. Sowohl wegen der soeben besprochenen Bedeutung als auch aus Gleichung (16) folgt jedoch, daß die Wahl des Koordinatensystems nicht von Einfluß

sein kann. Auch bei direkter Berechnung kann man leicht zeigen, daß man bei Einführung eines neuen, rechtwinkligen Koordinatensystems wieder auf einen Ausdruck von genau der gleichen Form geführt wird. Man drückt diese Eigenschaft aus, wenn man sagt, der Ausdruck ist *invariant* gegenüber einer Koordinatentransformation.

Aus dem Vorangehenden folgt, daß die Bedingung $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ gleichbedeutend ist mit der Bedingung, daß, erstreckt über jede geschlossene Oberfläche,

$$\int \mathfrak{A}_n \, d\sigma = 0 \tag{19}$$

ist.

Doch bleibt noch ein Punkt zu beachten. Wir haben oben stets vorausgesetzt, daß die Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}$ stetige Funktionen der Koordinaten seien. Bei physikalischen Anwendungen kommt es jedoch häufig vor, daß die in Betracht kommenden Vektoren auf den beiden Seiten einer bestimmten Fläche, z. B. in der Grenzfläche zwischen zwei Medien, verschiedene Werte annehmen. Eine solche Fläche ist dann eine Unstetigkeitsfläche, und für ihre Punkte verliert z. B. der Ausdruck $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}$ seinen Sinn.

Welchen Bedingungen muß nun der Vektor $\mathfrak{A}$ in der Umgebung einer Unstetigkeitsfläche genügen, der die Strömungsgeschwindigkeit in einer inkompressiblen Flüssigkeit darstellt? Betrachten wir, um diese Frage zu beantworten, einen sehr kleinen zylindrischen Raum, dessen Grund- und Deckflächen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (Fig. 2) auf beiden Seiten der Unstetigkeitsflächen σ und in sehr geringem Abstand von ihr gelegen sind, während die übrige Begrenzung ein Zylindermantel bildet, dessen Achse parallel einer der Oberflächennormalen in dem untersuchten Gebiet ist.

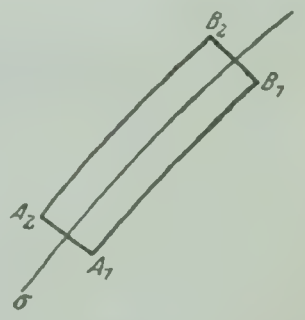

Fig. 2.

Wir wollen die zuerst genannten Grund- und Deckflächen so klein annehmen, daß wir die Unterschiede der Werte des Vektors $\mathfrak{A}$ in den verschiedenen Punkten der Fläche $A_1 B_1$ und ebenso der Fläche $A_2 B_2$ vernachlässigen können. Ferner mögen diese Flächen noch sehr groß sein im Vergleich zu der des Zylindermantels. Wir haben nun auszudrücken, daß die gesamte Flüssigkeitsmenge in

dem betrachteten Raumelement konstant bleibt, daß also in einer willkürlichen Zeiteinheit ebensoviel Flüssigkeit durch den einen Teil der Begrenzung nach innen wie durch den anderen nach außen strömt. Diese letzte Voraussetzung erlaubt uns, die Flüssigkeitsmenge, die durch den Zylindermantel strömt, zu vernachlässigen. (Dabei ist, wie stets bei unseren Betrachtungen, stillschweigend vorausgesetzt, daß der Vektor A überall einen endlichen Wert besitzt.) Die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch die Seitenfläche $A_1 B_1$ nach innen strömt, können wir ausdrücken durch

$$(A_n)_1 \, d\sigma,$$

wobei $d\sigma$ die Größe der Seitenflächen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ bedeutet, n die Richtung der Normalen von B_1 nach B_2 ist und der Index 1 anzeigen soll, daß wir den Wert der Komponente A_n auf der Seite der Fläche σ einsetzen, auf der $A_1 B_1$ liegt. Ebenso finden wir für die Flüssigkeitsmenge, die durch $A_2 B_2$ nach innen strömt,

$$-(A_n)_2 \, d\sigma$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke muß Null ergeben, was offenbar verlangt:

$$(A_n)_1 = (A_n)_2, \tag{20}$$

oder in Worten: die Normalkomponente des Vektors muß auch an der Unstetigkeitsfläche stetig sein.

Wenn unsere Flüssigkeit inkompressibel ist, so ist klar, daß die Beziehung (19) für jede geschlossene Fläche, auch wenn sie durch die betrachtete Unstetigkeitsfläche geschnitten wird, gültig sein muß, und daß umgekehrt diese Bedingung auch genügt, um die Inkompressibilität auszudrücken. Im gesamten Raum, sowohl auf der einen wie auf der anderen Seite der Unstetigkeitsfläche bleiben die früheren Überlegungen bestehen, und darum gilt für jeden einzelnen Punkt Gleichung (18). Auf die Punkte der Unstetigkeitsfläche selbst aber ist die Beziehung (20) anzuwenden. In diesem Sinne können wir also sagen, daß (19) gleichwertig ist mit den Gleichungen (18) und (20) zusammengenommen.

Wir wollen nun eine Figur besprechen, die uns in vielen Fällen nützlich sein kann, um den Verlauf eines Vektors A im Felde anschaulich zu machen. Wir beginnen damit, Richtungslinien zu bestimmen. Gehen wir von einem willkürlichen Punkt des Feldes aus ein kleines Stückchen in der Richtung, die der betrachtete Vektor in diesem

Punkt hat, dann weiter in der Richtung des Vektors in dem nun erreichten Punkt und so fort, so ist unser Weg eine bestimmte, gebrochene Linie. Der Grenzwert, dem diese Linie sich nähert, wenn wir die Längen der aufeinanderfolgenden Wegstrecken unbegrenzt abnehmen lassen, ist eine Kurve, die die Eigenschaft hat, daß in jedem ihrer Punkte die Tangente die Richtung des Vektors in eben diesem Punkte anzeigt. Solche Kurven kann man ganz allgemein Richtungslinien nennen, in besonderen Fällen heißen sie, je nach Bedeutung der betrachteten Vektoren, Kraftlinien, Verschiebungslinien, Stromlinien usf. Nehmen wir nun im Feld eine sehr kleine, geschlossene Kurve an und denken uns durch alle ihre Punkte Richtungslinien gezogen, so entsteht eine röhrenförmige Fläche, die wir im allgemeinen Richtungsröhre, in besonderen Fällen wieder Kraftröhre usw. nennen wollen. Diese Richtungsröhren haben eine charakteristische Eigenschaft, wenn der Vektor A die Strömungsgeschwindigkeit in einer inkompressiblen Flüssigkeit bedeutet. Wir wollen uns einen Raum durch eine Richtungsröhre und zwei dazu senkrechte Querschnitte ω_1 und ω_2 begrenzt denken und nun ausdrücken, daß die Flüssigkeitsmenge innerhalb dieses Raumes konstant bleibt. Durch die Röhrenwandungen strömt keine Flüssigkeit, da die Strömungsrichtung überall parallel der Röhrenwandung verläuft. Durch das Flächenelement ω_1 strömt pro Zeiteinheit eine Menge $A_1 \omega_1$ nach innen, wenn A_1 den Wert des Vektors in einem Punkt der Oberfläche ω_1 bedeutet; wir nehmen die Oberfläche ω_1 so klein an, daß wir die Unterschiede der Werte des Vektors A in den verschiedenen Punkten des Flächenelementes vernachlässigen dürfen. Durch die Fläche ω_2 strömt ebenso $A_2 \omega_2$ nach außen, und diese beiden Mengen müssen offenbar gleich groß sein,

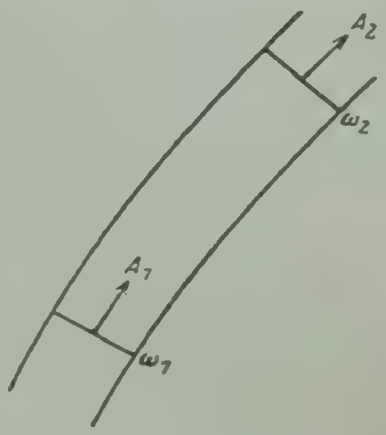

Fig. 3.

$$A_1 \omega_1 = A_2 \omega_2. \tag{21}$$

Ein zur Achse senkrechter Querschnitt ist hiernach in jedem Punkt umgekehrt proportional dem Wert des Vektors an jener Stelle. Hieraus folgt weiter, daß, wenn wir zwei Querschnitte ω'_1 und ω'_2 anbringen,

deren Normalen mit den Richtungen des Vektors A in einem Punkt des Querschnittes spitze Winkel ϑ_1 und ϑ_2 bilden, die Beziehung (21) übergeht in

$$A_1 \omega_1' \cos \vartheta_1 = A_2 \omega_2' \cos \vartheta_2. \tag{22}$$

Wir können uns nun das gesamte Feld in solche Richtungsröhren aufgeteilt denken. Wie aus der Beziehung (21) folgt, können diese Röhren niemals dadurch enden, daß sich der Querschnitt in einen Punkt zusammenzieht. Vielmehr haben wir uns vorzustellen, daß die Röhren entweder geschlossen sind oder aber an den Grenzen des Feldes beginnen und enden.

Solenoidale Vektoren.

Gleichung (21), die stets gültig ist, wenn A die Geschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit bedeutet, ist auch hinreichend, um auszudrücken, daß der Vektor A sich so im Feld verhält, als ob er die Geschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit darstellen sollte. Denn, wenn wir unter A eine Strömungsgeschwindigkeit verstehen, so können wir aus (21) [oder der damit gleichwertigen Gleichung (22)] stets ableiten, daß die gesamte Flüssigkeitsmenge innerhalb einer beliebigen, geschlossenen und ganz im Felde des Vektors liegenden Fläche konstant ist. Jede Richtungsröhre, die in die Fläche eindringt, muß, wie soeben gezeigt wurde, sie auch wieder verlassen. Wohl kann es vorkommen, daß eine solche Röhre mehrfach in die Fläche eindringt, doch tritt sie gleich oft auch wieder aus ihr heraus. Jedenfalls lassen sich dann je zwei Oberflächenelemente, die Querschnitte der gleichen Richtungsröhre sind, zusammenfassen und die ganze Oberfläche in solche Paare von Elementen aufteilen. (Ausgenommen hiervon ist der Fall, daß ein Teil der Oberfläche mit der Wandung einer oder mehrerer Röhren zusammenfällt, doch strömt ja gerade durch diesen Teil die Flüssigkeit weder nach außen noch nach innen.) Gleichung (22) sagt nun aus, daß für je zwei dieser Elemente der Satz gilt: durch die eine Fläche strömt genau soviel Substanz hinein, wie durch die andere heraus; denn der Ausdruck $\omega_1' A_1 \cos \vartheta_1 \, dt$ gibt den Inhalt eines schiefen Zylinders an, den die in der Zeit dt durch das Oberflächenelement ω_1' nach innen strömende Flüssigkeit einnimmt. Wenn also für jede Richtungsröhre Gleichung (21) bzw. (22) gilt, so muß die gesamte Flüssigkeitsmenge innerhalb der betrachteten Fläche konstant sein.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so sagen wir, der Vektor A ist solenoidal. Nach dem Vorhergehenden wird diese Eigenschaft durch die Gleichung $\int A_n \, d\sigma = 0$ oder durch die beiden Gleichungen (18) und (20) ausgedrückt.

Ist eine Unstetigkeitsfläche vorhanden, so wissen wir bereits, daß die Normalkomponenten eines solenoidalen Vektors A an der Unstetigkeitsfläche stetig sind. Das gleiche muß jetzt nach (22) auch für eine Richtungsröhre an der Schnittstelle mit einer Unstetigkeitsfläche gelten. Die der Unstetigkeitsfläche parallelen Komponenten werden im allgemeinen nicht stetig sein (und sind sie es doch, so weist eben der betrachtete Vektor an der Unstetigkeitsfläche keine besonderen Merkmale auf). Konstruieren wir also unseren Vektor in zwei Punkten zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche, so werden wir für ihn zwei verschiedene Richtungen finden. Richtungslinien und -röhren zeigen also im allgemeinen an einer Unstetigkeitsfläche einen Knick.

Nach dem Vorbilde Faradays wollen wir uns ein anschauliches Bild konstruieren, das uns gestattet, neben der Richtung auch die Größe des Vektors in den verschiedenen Punkten des Feldes abzulesen. Wir tun dies, indem wir den Ausdruck $A\,\omega$, der nach dem vorigen für einen solenoidalen Vektor innerhalb einer einzelnen Richtungsröhre konstant ist, für alle Richtungsröhren denselben Wert annehmen lassen. Dies läßt sich durch passende Wahl der Röhrenquerschnitte stets erreichen. Denken wir uns z. B., unsere Flächeneinheit sei sehr klein, und wir wählen unsere Röhrenquerschnitte so, daß überall $A\,\omega = 1$ ist; der Querschnitt, gleich $1/A$ mal der gewählten Flächeneinheit, ist dann ebenfalls klein. Um den häufig in der Literatur verwandten Ausdruck „Anzahl Richtungslinien, die eine bestimmte Fläche schneiden“ zu erklären, wählen wir statt jeder Richtungsröhre eine Richtungslinie, z. B. diejenige, die mitten durch die Röhre verläuft. Da die Röhren mit zunehmendem A enger werden, werden die Richtungslinien in der Umgebung irgendeines Punktes um so dichter beieinander liegen, je größere Werte der Vektor dort annimmt. Denn die Zahl, die die Größe des Vektors angibt, ist gleich der Anzahl Richtungslinien, die eine durch den betrachteten Punkt senkrecht zur Richtungslinie gelegte Fläche von der Größe der Einheit schneiden. — Die Beschränkung auf sehr kleine Flächen-

einheiten läßt sich übrigens auch umgehen. Wir können die Richtungsröhren so konstruieren, daß $\mathfrak{A}\,\omega = 1/N$ ist, wobei N irgendeine große Zahl bedeutet. Auch bei dieser Annahme werden die Richtungslinien mit wachsendem $\mathfrak{A}$ zusammengedrängt, und man kann ebenso von der Anzahl Richtungslinien sprechen, die pro Flächeneinheit eine bestimmte Fläche schneiden. Sie ist $N \cdot \mathfrak{A}$, da $\omega = 1/\mathfrak{A} \cdot N$ ist, und wir können sie gleich $\mathfrak{A}$ setzen, wenn wir definieren, daß wir unter der Anzahl der Richtungslinien $1/N$ derjenigen Zahl verstehen wollen, die unsere Konstruktion uns liefert. Man kann nun leicht zeigen, daß die Anzahl Richtungslinien, die einen bestimmten Teil der Oberfläche schneiden, stets gleich dem Oberflächenintegral

$$\int \mathfrak{A}_n \, d\sigma,$$

erstreckt über dieselbe Oberfläche, ist. Betrachten wir nämlich als Oberflächenelemente die Schnitte ω' mit unseren Richtungsröhren (deren Flächeninhalt unbegrenzt abnimmt, wenn wir ihre Anzahl N unbegrenzt anwachsen lassen), so liefert jedes solche Element einen Beitrag

$$\mathfrak{A} \cos(n\,\mathfrak{A})\,\omega'$$

zum Integral, wobei $\omega' \cos(n\,\mathfrak{A})$ den zur Röhre senkrechten Querschnitt bedeutet. Wir können also für den Beitrag schreiben:

$$\mathfrak{A} \cdot \omega;$$

nach der Art, wie wir die Richtungsröhren konstruiert haben, ist das $1/N$. Also wird das gesamte Integral $1/N$ mal so groß wie die Anzahl der Oberflächenelemente und darum durch die gleiche Zahl wie die Anzahl der Richtungslinien gegeben.

Wir hatten angenommen, die Normale sei so auf der betrachteten Oberfläche errichtet, daß ihre Richtung mit $\mathfrak{A}$ einen spitzen Winkel bildet. Wenn wir für einen bestimmten Punkt der Oberfläche die Richtung der Normalen in dieser Weise festgelegt haben und dann die weiteren Normalen stets nach derselben Seite der Oberfläche hin konstruieren, kann es jedoch auch vorkommen, daß in einem anderen Gebiete die Normale mit der Richtung des Vektors einen stumpfen Winkel bildet. Falls die Oberfläche keine Singularitäten aufweist, werden diese Gebiete durch eine Kurve voneinander geschieden, in deren Punkten die Oberflächennormale senkrecht

zur Richtung des Vektors A steht, wo also die Oberfläche die Richtungslinien tangiert; eine Anzahl Richtungslinien wird dann die Oberfläche zweimal schneiden. Solche Richtungslinien brauchen wir für unsere Betrachtungen nicht mit zu berücksichtigen, denn die zugehörigen Richtungsröhren liefern als Beitrag zum Oberflächenintegral zwei Elemente, die sich gegenseitig aufheben.

Wir verstehen jetzt, was man bei einem solenoidalen Vektor unter der Anzahl Richtungslinien versteht, die innerhalb einer bestimmten, geschlossenen Kurve liegen, und wir wissen, daß diese Anzahl gleich dem Oberflächenintegral des betreffenden Vektors ist, erstreckt über eine willkürliche Oberfläche mit dieser Kurve als Rand. Die Oberflächenintegrale erstreckt über zwei verschiedene Oberflächen, die beide dieselbe Kurve zum Rand haben, sind nun stets gleich, wenn wir für beide die positive Richtung der Normalen so wählen, daß sie demselben Richtungssinn auf der gegebenen Kurve entsprechen. Um dies zu beweisen, wollen wir die beiden Oberflächen O_1 und O_2 nennen. Sie bilden zusammen eine geschlossene Fläche, und das Oberflächenintegral unseres Vektors über diese geschlossene Oberfläche ist, in Anbetracht des solenoidalen Charakters des Vektors, gleich Null. Fällt die Richtung der Normalen auf der Fläche O_1 mit der der nach außen gezogenen Normalen auf der geschlossenen Fläche zusammen, so sind in dem anderen, mit O_2 zusammenfallenden Gebiet die Richtungen der Normalen einander entgegengesetzt. Das Oberflächenintegral über die geschlossene Fläche beträgt also

$$\int_{O_1} \mathfrak{A}_n \, d\sigma - \int_{O_2} \mathfrak{A}_n \, d\sigma$$

und da es gleich Null ist, so folgt hieraus die Gleichheit, die wir beweisen wollten.

Dieses letzte Resultat können wir auch in folgender Weise ausdrücken: die notwendige und hinreichende Bedingung, die ein Vektor erfüllen muß, damit sein Oberflächenintegral allein von der Randkurve der Oberfläche abhängt, ist die, daß er solenoidal ist.

Der Potentialvektor.

Ein ganz analoges Problem ergibt sich bei Linienintegralen. Wir können fragen, wie der Verlauf eines Vektors im Feld sein muß, damit der Wert des Linienintegrals allein von den Endpunkten

abhängt. Offenbar muß dann das Linienintegral stets verschwinden, wenn es über eine geschlossene Kurve erstreckt wird. Denn nehmen wir auf der geschlossenen Kurve s zwei Punkte P und Q an, und sei R ein Punkt auf dem einen Kurvenast zwischen P und Q und S ein Punkt auf dem anderen, so ist

$$\int_s \mathfrak{A}_s\, ds = \int_{PRQ} \mathfrak{A}_s\, ds + \int_{QSP} \mathfrak{A}_s\, ds = \int_{PRQ} \mathfrak{A}_s\, ds - \int_{PSQ} \mathfrak{A}_s\, ds.$$

Soll nun der Wert des Linienintegrals von P nach Q allein von den Endpunkten (und damit nicht vom Weg) abhängen, so müssen die beiden Terme auf der rechten Seite der letzten Gleichung einander gleich sein, und damit das Integral über den geschlossenen Weg verschwinden. Offenbar ist diese Bedingung auch hinreichend.

Ist diese Forderung erfüllt und bedeutet P einen festen Punkt, so ist das betrachtete Linienintegral allein eine Funktion der Koordinaten von Q. Die Beziehung zwischen dieser Funktion und den Koordinaten von Q wollen wir noch näher untersuchen, wobei wir für P einen bestimmten Punkt in unendlich großer Entfernung annehmen wollen.

Die Beschränkung, daß P ein bestimmter Punkt in unendlichem Abstand sei, ist überflüssig, sobald wir annehmen, daß der Vektor $\mathfrak{A}$ in sehr großer Entfernung sehr klein wird, und damit das Linienintegral, über einen Weg erstreckt, der ganz im Unendlichen liegt, stets gleich Null gesetzt werden kann. Bei physikalischen Problemen ist diese Annahme in sehr vielen Fällen erlaubt und bedeutet nichts anderes als die Aussage, die Zustände, die im Unendlichen bestehen, üben auf unsere Untersuchungen keinen merklichen Einfluß mehr aus. Zunächst noch einige Worte über die Abnahme einer Größe Φ in unendlich großem Abstand. Wir wählen einen willkürlichen Punkt O im betrachteten Raum und nennen r den Abstand eines anderen Punktes von O. Die Funktion Φ wird unendlich klein von n^{ter} Ordnung heißt, der Ausdruck

$$r^n \Phi$$

bleibt endlich und nähert sich auch nicht der Grenze Null, falls der Punkt, in dem wir die Funktion betrachten, sich unendlich weit entfernt.

Aus dem Vorangehenden folgt nun ohne weiteres, daß es für den Vektor $\mathfrak{A}$ genügt, wenn er klein von höherer als erster Ordnung wird.

In gleicher Weise werden wir ein Oberflächenintegral, erstreckt über eine Fläche, die ganz im Unendlichen liegt, vernachlässigen können, wenn der Integrand von höherer als zweiter Ordnung unendlich klein wird.

Das betrachtete Linienintegral des Vektors A ist eine skalare Größe, die allein von den Koordinaten von Q abhängt und die wir mit $-\Phi$ bezeichnen wollen. Wir fragen nach dem Differentialquotienten dieser Funktion nach einer willkürlichen Richtung h. Ist Q_1 ein Punkt, den wir erreichen, wenn wir von Q aus um die Strecke Δh vorwärts gehen, so ist

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial h} = \lim_{\Delta h = 0} \frac{\Phi_Q - \Phi_{Q_1}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h = 0} \frac{\int_P^{Q_1} \mathrm{A}_s\, ds - \int_P^{Q} \mathrm{A}_s\, ds}{\Delta h} =$$

$$= \lim_{\Delta h = 0} \frac{1}{\Delta h} \int_Q^{Q_1} \mathrm{A}_s\, ds = \mathrm{A}_h, \tag{23}$$

da wir für den Betrag des letzten Integrals $\Delta h\ \mathrm{A}_h$ setzen können; für A_h haben wir dabei den Wert für einen Punkt zwischen Q und Q_1 einzusetzen. Der Punkt Q_1 nähert sich Q aber unbegrenzt, wenn Δh gegen Null abnimmt.

Die Größe Φ wird Potential des Vektors A genannt. In Gleichung (23) sind als Sonderfälle enthalten:

$$\mathrm{A}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \mathrm{A}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \mathrm{A}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{24}$$

Umgekehrt kann man, wenn A diesen drei Gleichungen genügt, leicht zeigen, daß dann allgemein auch Gleichung (23) erfüllt ist. Wir nennen einen solchen Vektor A Potentialvektor.

Ist im ganzen Feld eine skalare Größe Φ gegeben, so können wir stets einen Vektor A so bestimmen, daß in jedem Punkt die Gleichungen (23) und (24) erfüllt sind (wenigstens, wenn die Funktion Φ so beschaffen ist, daß diese Gleichungen einen Sinn haben). Der Vektor, der in jedem Punkt A entgegengesetzt gleich ist, heißt Gradient der skalaren Größe Φ, und die Beziehung zwischen A und Φ ist gegeben durch

$$\mathrm{A} = -\operatorname{grad} \Phi, \tag{25}$$

ein Ausdruck, der also mit (23) und (24) gleichwertig ist.

Auch jetzt können wir mit Hilfe einer Figur den Zusammenhang zwischen der skalaren Größe Φ und dem Vektor A veranschaulichen. Wir konstruieren dazu die Flächen

$$\Phi = C,$$

die sogenannten Äquipotentialflächen. Zunächst ist klar, daß die Richtungslinien des Vektors A überall senkrecht zu den Äquipotentialflächen stehen. Denn aus (24) folgt, daß der Richtungscosinus der Normalen in jedem Punkt einer solchen Fläche gleich dem des Vektors in jenem Punkte ist. Die gleiche Folgerung läßt sich auch aus (23) ziehen, denn Gleichung (23) sagt aus, daß für jede Richtung h, die in der Tangentialebene an der Fläche $\Phi = C$ gelegen ist, die Komponente des Vektors gleich Null ist. Denken wir uns weiter zwei sehr nahe beieinander gelegene Äquipotentialflächen, die also zwei sehr wenig voneinander unterschiedenen Werten von C entsprechen, so ist der Potentialunterschied zwischen einem Punkt der einen und einem Punkt der anderen Fläche für jedes Punktpaar gleich, der Potentialunterschied pro Längeneinheit hängt also nur vom Abstand der Punkte ab. Den Grenzwert, dem der Potentialunterschied pro Längeneinheit zwischen zwei Punkten zustrebt, wenn der zweite längs einer gegebenen Geraden sich dem ersten nähert, nennen wir das Potentialgefälle in dem betrachteten Punkt in Richtung dieser Geraden. Es ist nun aus dem Vorangegangenen einleuchtend, daß die Richtungslinien des Vektors A, da sie senkrecht zu den Äquipotentialflächen stehen, in jedem Punkt die Richtung haben, in der das Potentialgefälle seinen maximalen Wert annimmt.

Wir möchten noch darauf hinweisen, daß, falls der Vektor A eine Kraft ist, das Linienintegral $\int A_s \, d\,s$ die Arbeit bei einer Verschiebung des Angriffspunktes längs des Integrationsweges bedeutet. Ist die Kraft ein Potentialvektor, oder hängt sie, wie man auch sagt, von einem Potential Φ ab, so ist die Arbeit bei einer Verschiebung von P nach Q gegeben durch $\Phi_P - \Phi_Q$.

Wenn A ein Potentialvektor ist, so folgt aus (24):

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Umgekehrt können wir die Größen

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad (26)$$

als Komponenten eines Vektors ansehen, der (wegen seiner Bedeutung in der Theorie linearer Transformationen) Rotation (oder Curl) des Vektors A genannt wird, und wir schreiben dafür:

$$\mathrm{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{A}.$$

Man kann durch Anwendung der aus der analytischen Geometrie bekannten Transformationsgleichungen aus (26) leicht ableiten, daß in einem anderen rechtwinkligen Koordinatensystem die Gleichungen, die die Beziehungen zwischen den Vektoren A und B angeben, die gleiche Form behalten.

Für einen Potentialvektor ist die Rotation gleich Null.

Wenn im Felde eine Fläche auftritt, für die die Komponenten des Vektors A unstetig sind, so verlieren die Differentialquotienten ihren Sinn. Für diesen Fall haben also die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial x} = 0$$

noch eine Ergänzung nötig, um auszudrücken, daß im ganzen Feld das Linienintegral längs einer willkürlich geschlossenen Kurve verschwindet, — ebenso wie bei einem solenoidalen Vektor eine besondere Ergänzung für Unstetigkeitsflächen nötig war.

Wir betrachten zu diesem Zweck das Linienintegral des Vektors A längs der Umrandung eines sehr kleinen Rechtecks $P\,Q\,Q_1\,P_1$ (Fig. 4), dessen Seiten $P\,Q$ und $P_1\,Q_1$ an den beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche parallel zur Tangentialebene an die Oberfläche verlaufen; die anderen zwei Seiten $P\,P_1$ und $Q\,Q_1$ mögen sehr klein im Vergleich zu den ersteren sein, und wir sollen beim Übergang zur Grenze den Beitrag dieser Seiten zum Integral gegenüber den Beiträgen von $P\,Q$ und $P_1\,Q_1$ vernachlässigen können. Nennen wir s die Richtung der Seiten $P\,Q$ und $P_1\,Q_1$, so finden wir, wenn $P\,Q$ und $P_1\,Q_1$ so klein sind, daß die Veränderung des Vektors A auf diesen Strecken vernachlässigt werden kann:

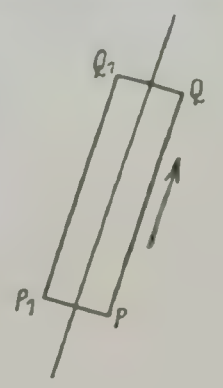

Fig. 4.

$$\mathrm{A}_s \cdot P\,Q = \mathrm{A}'_s \cdot P_1\,Q_1$$

wobei unter A_s der Wert der Komponente von A an der einen Seite der Unstetigkeitsfläche und unter A'_s an der anderen Seite verstanden werden soll. Unsere Bedingung lautet also:

$$\mathrm{A}_s = \mathrm{A}'_s,$$

oder in Worten, die tangentiellen Komponenten des Vektors müssen an der Unstetigkeitsfläche stetig sein.

Lassen wir zunächst den Fall von Unstetigkeiten an der Oberfläche außer Betracht, so leiten wir aus Gleichung (26) direkt ab

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Die Rotation eines Vektors ist also stets solenoidal. Umgekehrt können wir jeden solenoidalen Vektor als Rotation eines anderen Vektors auffassen und zwar in unendlich mannigfaltiger Weise. Denn ist $\mathfrak{B}$ der gegebene Vektor und $\mathfrak{A}$ ein Vektor, der den Gleichungen (26) genügt, so ist nach dem Vorangehenden auch

$$\mathfrak{A} + \operatorname{grad} \Phi$$

eine Lösung, wobei Φ eine willkürliche, skalare Größe ist. Wir haben nur noch zu untersuchen, ob wir, wenn $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ ist, stets eine Lösung von (26) angeben können. Das ist aber leicht, wenn wir, wie es bei vielen physikalischen Anwendungen der Fall ist, annehmen dürfen, daß in unendlich großem Abstand $\mathfrak{B}$ unendlich klein von höherer als erster Ordnung ist. Wir haben dann zu setzen

$$\mathfrak{A}_x = \int_{\infty}^{z} \mathfrak{B}_y \, dz, \qquad \mathfrak{A}_y = -\int_{\infty}^{z} \mathfrak{B}_x \, dz, \qquad \mathfrak{A}_z = 0,$$

wobei die Integrale ihre gewöhnliche Bedeutung haben. Daß dieser Ansatz den beiden ersten Gleichungen von (26) genügt, folgt ohne weiteres, und eine Substitution in die dritte ergibt die Identität

$$\mathfrak{B}_z = \int_{\infty}^{z} -\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y}\right) dz = \int_{\infty}^{z} \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} dz = \mathfrak{B}_z.$$

Die Voraussetzungen, die uns erlauben, die Differentialquotienten durch Differentiation unter dem Integralzeichen zu berechnen, sind bei physikalischen Anwendungen stets erfüllt. Sollten Unstetigkeiten auftreten, so ist stets eine besondere Untersuchung notwendig.

Der Stokessche Satz.

Für einen solenoidalen Vektor $\mathfrak{B}$ ist, wie wir wissen, das Oberflächenintegral über eine willkürliche Fläche, die eine gegebene Kurve zum Rand hat, allein von dieser Randkurve abhängig. Durch Einführung des oben angegebenen Vektors $\mathfrak{A}$ sind wir nun imstande, das Oberflächenintegral durch ein Linienintegral längs der Rand-

kurve zu ersetzen (ebenso wie wir bei Einführung des Potentials ein Linienintegral, das allein von den Endpunkten abhängt, durch eine Funktion der Koordinaten eben dieser Endpunkte angeben konnten). Wie man dieses tut, gibt der Satz von Stokes an. Beim Beweis wollen wir zunächst voraussetzen, daß die gegebene Randlinie eine ebene Kurve sei. Wir können dann die Fläche innerhalb der Kurve zu unserer Oberfläche, über die integriert wird, wählen (da ja der Wert des Integrals von der Wahl der Oberfläche unabhängig ist). Ferner legen wir unser Koordinatensystem so, daß die $X\,O\,Y$-Ebene mit der Kurvenebene zusammenfällt und zählen die Normale auf die Oberfläche positiv in der Richtung der positiven Z-Achse. Dann gilt

$$\int \mathfrak{B}_n \, d\sigma = \int \mathfrak{B}_z \, dx \, dy = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} \right) dx \, dy .$$

Betrachten wir zunächst das Integral

$$\int \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} dx \, dy .$$

Wir können nach y integrieren, das bedeutet, wir fassen alle die Oberflächenelemente zusammen, die in demselben Streifen senkrecht zur X-Achse liegen. Der Einfachheit halber nehmen wir noch weiter an, ein Lot auf der X-Achse solle die gegebene Kurve nur in zwei Punkten schneiden; wenn man in Richtung der Y-Achse wandert, möge das Lot bei einem Punkt 1 in die Fläche eindringen und sie im Punkt 2 wieder verlassen. Als Beitrag zum Integral liefert der Streifen $(\mathfrak{A}_{x2} - \mathfrak{A}_{x1})\, dx$, im ganzen erhalten wir also

$$\int (\mathfrak{A}_{x2} - \mathfrak{A}_{x1})\, dx = - \int \mathfrak{A}_x \, dx ,$$

wobei dieses letzte Integral über die ganze Randkurve zu erstrecken ist; für alle Punkte, die dem Punkt 2 entsprechen, wird das Element dx negativ gezählt. Der Beweis läßt sich leicht ergänzen, wenn Lote zur X-Achse auftreten, die die gegebene Kurve in mehr als zwei Punkten schneiden. Ebenso ergibt sich

$$\int \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} dx \, dy = + \int \mathfrak{A}_y \, dy$$

und daraus

$$\int \mathfrak{B}_n \, d\sigma = \int (\mathfrak{A}_x \, dx + \mathfrak{A}_y \, dy) = \int \mathfrak{A}_s \, ds . \qquad (27)$$

Aus der Form des Resultates läßt sich erkennen, daß die Wahl des Koordinatensystems ohne Einfluß ist. Den Beweis für den allgemeinen Fall wollen wir durch einen Grenzübergang führen. Wir betrachten dazu die gegebene Randkurve als limes einer gebrochenen Kurve und die gekrümmte Fläche als limes einer gebrochenen Fläche; in Übereinstimmung mit unseren Festsetzungen auf S. 9 legen wir für jede der Flächenumrandungen einen Richtungssinn fest und zwar so, daß, falls die Flächenbegrenzung mit unserer Randkurve ein Element gemeinsam hat, das Element stets in dem Sinn durchlaufen wird, der für die Randkurve angenommen wurde, während die übrigen Seiten, die stets zwei Flächen gemeinsam sind, für diese zwei Flächen in entgegengesetztem Sinn durchlaufen werden. Wenden wir nun auf jede der Flächen den soeben bewiesenen Satz an, so finden wir als Summe der Linienintegrale das Linienintegral längs der Randkurve und als Summe der Oberflächenintegrale das Oberflächenintegral über die gesamte gebrochene Fläche. Durch einen Grenzübergang folgt dann hieraus der Beweis des STOKESschen Satzes für eine Raumkurve.

Die LAPLACEsche Gleichung.

Wenn in einem Raum ein Vektor solenoidal ist und seine Rotation verschwindet, so erfüllt in diesem Raum sein Potential eine berühmte Differentialgleichung. Denn dann gilt

$$\mathfrak{A}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{A}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \mathfrak{A}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

und wenn wir substituieren

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} = 0,$$

so folgt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

wofür man allgemein schreibt:

$$\Delta \Phi = 0 \tag{28}$$

Dies ist die LAPLACEsche Gleichung, die in der Theorie der Elektrizität eine wichtige Rolle spielt. Eine fast noch größere Bedeutung erlangte die Gleichung durch den Umstand, daß auch das NEWTONsche

Potential im Raum außerhalb der sich anziehenden Massen ihr genügt. Denken wir uns nämlich eine Anzahl Massenpunkte mit den Massen μ_k, die auf einen bestimmten Massenpunkt in Richtung der Verbindungsgeraden Kräfte proportional den Massen μ_k und umgekehrt proportional den Quadraten der Abstände r_k ausüben, so wirkt auf den betrachteten Massenpunkt eine Gesamtkraft, die — bis auf einen Proportionalitätsfaktor — entgegengesetzt gleich der Vektorsumme

$$\Sigma \frac{\mu_k}{r_k^2}$$

ist. Der Vektor $\frac{\mu_k}{r_k^2}$ hat die Richtung vom anziehenden zum angezogenen Massenpunkt. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der Vektor $\Sigma \frac{\mu_k}{r_k^2}$ von einem Potential

$$\Sigma \frac{\mu_k}{r_k}$$

abhängt. Erfüllt die anziehende Masse einen Raum kontinuierlich, so sind die Summen durch Integrale zu ersetzen und wir finden für das Potential

$$\Phi = \int \frac{\mu\,(x_1, y_1, z_1)}{r} d\,S_1. \tag{29}$$

Wir haben hier den Koordinaten (und ebenso dem Raumelement) einen Index angefügt, um sie von den Koordinaten des Punktes, in dem wir Φ berechnen wollen, zu unterscheiden; diese wollen wir mit x, y, z bezeichnen. Die Funktion $\mu\,(x_1, y_1, z_1)$ gibt die Dichte im Punkt x_1, y_1, z_1 an, und das Integral muß über den ganzen Raum erstreckt werden, in dem sich die anziehende Masse befindet. Nun ist, solange sich der Punkt x, y, z außerhalb dieses Raumes befindet

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \int \mu\,(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\,S_1, \quad \text{usf.}$$

und da

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r},$$

also

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x - x_1}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3 \cdot (x - x_1)^2}{r^5} \text{ usf.}$$

hieraus folgt

$$\Delta \frac{1}{r} = 0$$

und somit auch

$$\Delta \Phi = 0.$$

Der GREENsche Satz.

Erfüllen zwei Funktionen die LAPLACEsche Gleichung, so wollen wir jetzt eine Beziehung zwischen ihnen ableiten, die als GREENsches Theorem bekannt ist.

U und V seien zwei beliebige Funktionen, die im Raum innerhalb einer geschlossenen Fläche σ endlich und stetig sind und auch dort endliche und stetige erste und zweite Ableitungen besitzen; an der Oberfläche seien ferner die Funktionen selbst wie auch ihre ersten Ableitungen endlich und stetig. Dann gilt nach dem GAUSSschen Satz (Gleichung 16)

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U \frac{\partial V}{\partial z}\right) \right\} dS =$$

$$= \int U \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos(n\,x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(n\,y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(n\,z) \right) d\sigma =$$

$$= \int U \cdot \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma,$$

also

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) dS = \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \int U \Delta V\, dS. \quad (30)$$

In gleicher Weise finden wir durch Vertauschung von U und V für die rechte Seite der Gleichung (während die linke sich gleich bleibt)

$$\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - \int V \Delta U\, dS.$$

Somit ist:

$$\int \left(U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} - V \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = \int (U \Delta V - V \Delta U) dS. \qquad (31)$$

Hierzu ist noch zu bemerken, daß die Oberfläche σ wohl geschlossen sein muß, aber trotzdem aus verschiedenen, ganz voneinander getrennten oder einander umfassenden Teilen bestehen kann.

Sind U und V zwei Funktionen, die die Laplacesche Gleichung und außerdem die bereits genannten Bedingungen erfüllen, so folgt aus (31) die Gleichung von Green:

$$\int \left(U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} - V \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0. \qquad (32)$$

Als Sonderfall betrachten wir die Bedingung $U = C$, die natürlich der Laplaceschen Gleichung genügt. Gleichung (32) geht dann über in

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0,$$

was auch direkt aus dem Gaussschen Satz hätte abgeleitet werden können.

Aus Gleichung (30) können wir noch eine andere wichtige Eigenschaft von Funktionen, die die Laplacesche Gleichung erfüllen, ableiten, wenn wir $U = V$ setzen. Wir erhalten:

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\} dS = \int V \cdot \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma. \qquad (33)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung können wir nun beweisen, daß es nicht zwei verschiedene Funktionen geben kann, die überall innerhalb der Oberfläche der Laplaceschen Gleichung genügen und überall an der Oberfläche die gleichen vorgeschriebenen Werte annehmen. Wären nämlich zwei solche Funktionen V_1 und V_2 möglich, so müßte ihre Differenz Φ auch die Laplacesche Gleichung erfüllen und überall an der Oberfläche verschwinden; also wäre nach (33)

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dS = 0;$$

dies ist, da der Integrand nicht negativ sein kann, nur möglich, wenn er innerhalb des ganzen Integrationsgebietes identisch null ist; also ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

woraus folgt, daß Φ innerhalb der Oberfläche konstant ist. Da nun diese Funktion sowohl innerhalb als auch an der Oberfläche stetig sein und an der Oberfläche selbst verschwinden soll, so ist sie überall gleich Null, und damit ist $V_1 = V_2$.

Hierbei ist noch der bereits oben erwähnte Fall von besonderem Interesse, wenn nämlich die Oberfläche σ aus verschiedenen, geschlossenen Teilen besteht, von denen einer die übrigen ganz umschließt. Der Raum innerhalb der Oberfläche bedeutet dann den Raum zwischen dem umschließenden und den übrigen Teilen. Wir können auch annehmen, daß dieser erste Teil ganz im Unendlichen liegt. Der Satz läßt sich dann so formulieren: es sind nicht zwei verschiedene Funktionen möglich, die im Raum außerhalb einer gegebenen Oberfläche, die auch aus verschiedenen, getrennten Teilen bestehen kann, überall der LAPLACEschen Gleichung genügen, an der Oberfläche stetig sind und dort vorgegebene Werte annehmen. Wir müssen jedoch noch eine Bedingung zufügen, die uns gestattet, das Integral über die unendlich entfernte Oberfläche fortzulassen. Dazu genügt, daß $\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ im Unendlichen unendlich klein von höherer als zweiter Ordnung wird, und bei Anwendungen wird das stets der Fall sein. So z. B. wird das NEWTONsche Potential, das durch Gleichung (29) gegeben ist, in unendlichem Abstand klein in erster Ordnung, seine Ableitung in beliebiger Richtung wird klein in zweiter Ordnung, und der hier betrachtete Ausdruck $\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ damit unendlich klein in dritter Ordnung.

Natürlich ist auch denkbar, daß σ eine einzige geschlossene Oberfläche ist, die ganz im Unendlichen liegt. Dann sagt unser Satz aus: eine Funktion Φ, die überall der LAPLACEschen Gleichung genügt und im Unendlichen so schnell abnimmt, daß das Oberflächenintegral von $\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n}$, erstreckt über eine ganz im Unendlichen liegende Oberfläche, vernachlässigt werden kann, muß im ganzen Raum identisch Null sein.

Als eine Anwendung des Vorhergehenden können wir noch den Satz beweisen, daß ein Vektor vollständig bestimmt ist, wenn in jedem Punkt seine Rotation und Divergenz gegeben ist und außerdem bekannt ist, daß er im Unendlichen genügend schnell abnimmt.

Würden wir nämlich zwei Vektoren finden, die diese Bedingungen erfüllen, so müßte die Vektordifferenz im ganzen Raum rotationslos und solenoidal sein, also von einem Potential abhängen, das im ganzen Raum die Laplacesche Gleichung erfüllt; hieraus würde aber folgen, daß dieses Potential überall gleich Null ist, daß also die betrachtete Vektorendifferenz auch überall Null ist.

Erläuterung des Raumintegrals in Gleichung (29).

Wir kommen noch einmal auf die Funktion Φ zurück, die durch die Gleichung (29) $\Phi = \int \frac{\mu\,(x_1, y_1, z_1)}{r}\, d\,S_1$ definiert ist, wollen aber dabei von der speziellen Bedeutung der Funktion $\mu\,(x_1, y_1, z_1)$ absehen. Nur eine Voraussetzung sei gemacht: $\mu\,(x_1, y_1, z_1)$ soll für alle Punkte innerhalb einer gegebenen Fläche σ, der Grenzfläche des Integrationsgebietes S_1, bestimmte, endliche Werte haben und dort auch stetig sein. Die meisten unserer Resultate lassen sich später verallgemeinern, z. B. auf solche Fälle, wo diese Funktion beim Übergang in eine ganz oder teilweise innerhalb σ gelegene Fläche einen endlichen Sprung macht. Wenn der Punkt $P\,(x\,y\,z)$, für den wir die Funktion Φ berechnen wollen, innerhalb der Fläche σ gelegen ist, so können wir dem Integral in Gleichung (29) einen Sinn verleihen, wenn wir zunächst ein gewisses Gebiet um P herum bei der Integration ausschließen, und dann den Grenzwert bestimmen, dem das berechnete Integral sich nähert, wenn der ausgeschlossene Raum nach irgendeinem Gesetz gegen Null konvergiert. Existiert solch ein Grenzwert nicht, so hat das Integral keinen Sinn. Als abgegrenzten Raum können wir eine Kugel wählen, deren Radius wir dann unbegrenzt abnehmen lassen. Wir werden auch noch die Ableitungen der Funktion Φ bestimmen und speziell den Wert von $\Delta\,\Phi$. Den ersten Teil dieser Untersuchung fassen wir noch etwas allgemeiner und betrachten

$$I = \int U\, d\, S_1,$$

wobei das Integral über den Raum innerhalb einer Fläche σ erstreckt werden soll. U ist eine Funktion der Koordinaten x_1, y_1, z_1, der Punkte im Integrationsgebiet, und der Koordinaten x, y, z des Punktes P, für den I bestimmt werden soll. Wir nehmen an, daß P im Integrationsgebiet liegt und daß U für alle Werte von x_1, y_1, z_1

endlich und stetig ist, außer für $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$. Die Bedeutung von I wird dann gegeben durch die Gleichung

$$I = \lim_{r=0} I_r,$$

wobei

$$I_r = \int_r U \, dS_1$$

das Integral über den Raum innerhalb der Oberfläche σ und außerhalb einer Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius r bedeutet. Mit dieser Bezeichnungsweise können wir jetzt setzen

$$I_r = \int_R U \, dS_1 + \int_r^R U \, dS_1;$$

hierbei soll das erste Integral über den Raum innerhalb der Fläche σ und außerhalb einer Kugel um P mit einem willkürlichen Radius $R >$ r erstreckt werden (R soll aber doch so klein sein, daß die Kugel ganz innerhalb σ liegt) und das zweite Integral über den Raum zwischen den Kugeln mit den Radien r und R. Das erste Integral hat einen gewissen, von r unabhängigen Wert I_1. Das zweite, das wir I_2 nennen, müssen wir jetzt näher untersuchen. Dabei wollen wir noch annehmen, daß sich eine Zahl n so bestimmen läßt, daß

$$\varrho = U r^n$$

— r der Abstand bis zum Punkte P — bei gegen Null konvergierendem r sich einem endlichen Grenzwert nähert. Setzen wir, um unsere Gedanken zu fixieren, diesen Grenzwert z. B. positiv an, so muß auch U für alle r, die unterhalb eines bestimmten Wertes liegen, positiv sein. Dann aber kann auch I_2, wenn r kleiner als dieser Wert geworden ist, bei weiter abnehmendem r nur noch wachsen. Wir haben also die Existenz eines Limes bewiesen, sobald wir zeigen können, daß I_2 kleiner als eine endliche Zahl ist. Nun wissen wir aber, daß wegen der Existenz von $\lim_{r=0} \varrho$ die Größe ϱ innerhalb der Kugel mit dem Radius R unterhalb des Wertes ϱ_0 bleibt, also U stets kleiner als $\varrho_0 r^{-n}$ ist, darum folgt

$$I_2 < \int_r^R \varrho_0 r^{-n} \, dS_1.$$

In diesem Ausdruck kann ϱ_0 vor das Integralzeichen gezogen werden, und das übrigbleibende Integral läßt sich jetzt berechnen, wenn

wir den Integrationsraum in konzentrische Kugeln aufteilen. Wir erhalten:

$$I_2 < 4\pi\varrho_0 \int_r^R r^{-n+2} dr,$$

also

$$I_2 < \frac{4\pi\varrho_0}{-n+3}\{R^{-n+3} - r^{-n+3}\}.$$

Für $n < 3$ bleibt hiernach I_2 wirklich unterhalb einer bestimmten Zahl, und daraus folgt direkt, daß auch I_r sich einem endlichen Grenzwert nähert.

Für die Funktion Φ in Gleichung (29) können wir $n = 1$ annehmen, dann folgt, daß auch Φ im Raum innerhalb der Oberfläche σ einen Sinn hat.

Wir wollen nun den Differentialquotienten des Integrals I z. B. nach x betrachten. Zuerst werden wir zeigen, daß

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{r=0} \frac{\partial I_r}{\partial x}$$

ist, falls $\frac{\partial I_r}{\partial x}$ existiert und eine stetige Funktion von r und den Koordinaten ist.

Es gilt nämlich

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta}\left[\lim_{r=0} I_r(x+\delta, y, z) - \lim_{r=0} I_r(x, y, z)\right],$$

also

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{\delta=0}\lim_{r=0} \frac{\partial I_r(x+\vartheta\cdot\delta, y, z)}{\partial x},\ 0 < \vartheta < 1,$$

und

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{r=0} \frac{\partial I_r}{\partial x},$$

wobei die Vertauschung der Grenzübergänge wegen der geforderten Stetigkeitsbedingung von $\frac{\partial I_r}{\partial x}$ erlaubt ist.

Wir müssen nun zuerst einen Ausdruck für $\frac{\partial I_r}{\partial x}$ suchen. Es ist

$$\frac{\partial I_r}{\partial x} = \lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta}\left[\int_{r,\,x+\delta} U(x+\delta, y, z)\, dS_1 - \int_{r,\,x} U(x, y, z)\, \delta S_1\right],$$

wobei die Indizes an den Integralzeichen zugefügt wurden, um auszudrücken, daß für das erste Integral eine Kugel vom Radius r um den Punkt $P'(x+\delta, y, z)$, für das zweite eine Kugel mit dem Radius r um den Punkt $P(x, y, z)$ vom Integrationsgebiet ausgeschlossen ist. Die beiden Integrale sind nun aus zwei Gründen voneinander verschieden. Einmal geben zwei willkürliche Raumelemente verschiedene Beiträge, weil im ersten Integral der Wert von U für den Punkt P' und irgendeinen Punkt in dem betrachteten Raumelement dS_1 eingesetzt ist, während im zweiten der Wert von U für P und denselben Punkt in dS_1 genommen wird. Wir erhalten für den Ausdruck in der eckigen Klammer

$$\delta \int \frac{\partial U(x+\vartheta\delta, y, z)}{\partial x} dS_1,$$

wobei das Integral über den Teil des Integrationsgebietes erstreckt wird, der außerhalb der beiden ausgeschlossenen Kugeln liegt. Dies ergibt, wenn δ gegen Null konvergiert, für das Endresultat einen Beitrag

$$\int_{\mathrm{r}} \frac{\partial U}{\partial x} dS_1.$$

Zweitens gibt es, wie aus Fig. 5 ersichtlich ist, eine Anzahl Raumelemente, die für das erste Integral außerhalb des Integrationsgebietes liegen, für das zweite innerhalb, und eine Anzahl, für die das Umgekehrte zutrifft. Ein Element der ersten Art liefert

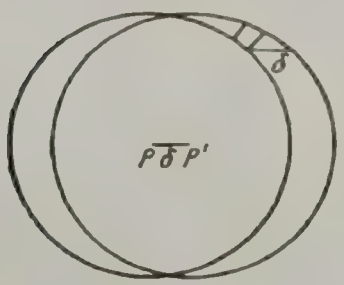

Fig. 5.

$$-U\,dB\,\delta\frac{x_1-x}{\mathrm{r}},$$

wo dB ein Oberflächenelement der Kugel um den Punkt P bedeutet, ein Element der zweiten Art ergibt

$$+U\,dB\,\delta\frac{x-x_1}{\mathrm{r}}.$$

Beide Ausdrücke haben also die gleiche Form, und alle betrachteten Elemente zusammen liefern ein Integral über die Kugeloberfläche

$$-\frac{\delta}{\mathrm{r}}\int U(x_1-x)\,dB.$$

Wir finden also im ganzen

$$\frac{\partial I_{\mathrm{r}}}{\partial x} = \int_{\mathrm{r}} \frac{\partial U}{\partial x} dS_1 - \frac{1}{\mathrm{r}}\int (x_1-x)\,U\,dB. \qquad (34)$$

Wenden wir jetzt diesen Ausdruck auf die Funktion Φ aus Gleichung (29) an, so finden wir, falls wir auch hier die Funktion Φ_r einführen

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x} = \int_r \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d S_1 - \frac{1}{r} \cdot \int \frac{x_1 - x}{r} \mu(x_1, y_1, z_1) d B.$$

Für das erste Integral ergibt sich

$$\int_r \mu(x_1\ y_1, z_1) \frac{x_1 - x}{r^3} d S_1.$$

Bedenken wir nun, daß

$$\mu(x_1, y_1, z_1) \frac{x_1 - x}{r}$$

im ganzen Integrationsgebiete endlich ist, so sehen wir nach dem Vorangehenden, daß der Ausdruck

$$\int_r \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{x_1 - x}{r^3} d S_1$$

einen Sinn hat; dieser Term ist also im betrachteten Gebiet eine stetige Funktion von r und den Koordinaten (x, y, z) und nähert sich für $r = 0$ einem bestimmten Grenzwert. Über den zweiten Term können wir aussagen, der absolute Betrag von

$$\mu(x_1, y_1, z_1) \frac{x_1 - x}{r}$$

bleibt unterhalb eines bestimmten Wertes ϱ, und darum ist der absolute Betrag dieses Termes kleiner als $4 \pi r \varrho$; der Ausdruck nähert sich dem Wert Null mit unbegrenzt abnehmendem r für alle x, y, z. Wir können also schreiben

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d S_1.$$

Die Poissonsche Gleichung.

Um nun $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ zu berechnen, bringen wir dieses letzte Resultat zunächst in eine andere Form, indem wir feststellen, daß

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}$$

ist. Unsere Gleichung lautet dann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\int \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} dS_1 = -\int \frac{\partial \frac{\mu}{r}}{\partial x_1} dS_1 + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} dS_1.$$

Das erste Integral können wir in gleicher Weise wie in Gleichung (16) behandeln und erhalten:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\int \frac{\mu}{r} \cos(n x_1)\, d\sigma_1 + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} dS_1, \tag{35}$$

wobei das erste Integral über die Oberfläche σ_1 zu erstrecken ist, wenn σ_1 den Raum begrenzt, in dem μ existiert. In diesem Integral hat die zu integrierende Funktion nirgends unendliche Werte, wir können also ohne weiteres die Ableitungen nach x bestimmen, indem wir unter dem Integralzeichen differenzieren.

Wollen wir die Ableitungen nach x im zweiten Integral bestimmen, so können wir Gleichung (34) anwenden, und der letzte Term wird dann wieder fortfallen. Wir finden also:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -\int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n x_1)\, d\sigma_1 + \int \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \partial S_1 \\ &= +\int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \cos(n x_1)\, d\sigma_1 - \int \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} dS_1.\end{aligned}$$

In gleicher Weise bestimmen wir $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ und erhalten:

$$\Delta \Phi = \int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d\sigma_1 - \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) dS_1.$$

Den letzten Term wollen wir mit Hilfe von Gleichung (30) ausrechnen. In (30) war jedoch vorausgesetzt, daß die dort auftretenden Funktionen U und V, denen hier μ und $1/r$ entsprechen, innerhalb der Oberfläche überall endlich und stetig seien und überall endliche und stetige erste und zweite Ableitungen besäßen; dies trifft aber für $1/r$ nicht zu. Wir legen darum zuerst wieder eine Kugel vom Radius r um den Punkt P und betrachten das Integral über das Gebiet außerhalb dieser Kugel

$$\int_{\tau} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) dS_1,$$

das für r = 0 in das gesuchte Integral übergeht. Auf dieses Integral können wir Gleichung (30) anwenden und finden, da $\Delta \frac{1}{r} = 0$ ist,

$$\int_r \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d S_1 = \int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d \sigma .$$

Die Oberfläche, über die dieses letzte Integral zu erstrecken ist, besteht aus der Oberfläche σ_1, und der Oberfläche der Kugel um P. Für diese letztere fällt nun die Richtung der Normalen, die vom Raum S_1 aus nach außen zu ziehen ist, mit dem nach P gezogenen Radius zusammen, es gilt also

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}.$$

Wir finden somit

$$\int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d S_1 =$$

$$= \int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d \sigma_1 + \lim_{\mathfrak{r}=0} \frac{1}{\mathfrak{r}^2} \int \mu \, d B,$$

und schließlich

$$\Delta \Phi = - \lim_{\mathfrak{r}=0} \frac{1}{\mathfrak{r}^2} \int \mu \, d B.$$

Nun ist μ eine stetige Funktion der Koordinaten, also wird, wenn r nur klein genug genommen wird, für alle Punkte der Kugeloberfläche μ sich von μ_P, dem Wert der Funktion in P, um weniger als einen willkürlich gewählten Betrag ε unterscheiden. Der Ausdruck $\int \mu \, d B$ liegt dann zwischen $4 \pi \mathfrak{r}^2 (\mu_P - \varepsilon)$ und $4 \pi \mathfrak{r}^2 (\mu_P + \varepsilon)$, also ist

$$\lim_{\mathfrak{r}=0} \frac{1}{\mathfrak{r}^2} \cdot \int \mu \, d B = 4 \pi \mu_P$$

und schließlich

$$\Delta \Phi = - 4 \pi \mu_P$$

Dies ist die POISSONsche Gleichung. Wir können auch sagen, die Funktion Φ genügt der Gleichung im ganzen Raum, denn außer-

halb der Oberfläche σ_1 ist $\mu = 0$ und die Gleichung geht in die LAPLACEsche Gleichung über.

Bei der Ableitung der POISSONschen Gleichung haben wir, um das GREENsche Theorem anwenden zu können, vorausgesetzt, daß die Funktion $\mu\,(x_1, y_1, z_1)$ mit ihren ersten Ableitungen auch an der Oberfläche σ_1 stetig sei. Diese Beschränkung können wir fallen lassen. Dazu legen wir um den Punkt P eine willkürliche Fläche, die ganz innerhalb σ_1 liegt, und nennen den Raum innerhalb dieser letzten Fläche S_1, den zwischen beiden Oberflächen S_2. Wir teilen das Integral (29) in zwei Teile, das erste Φ_1 erstreckt über den Raum S_1, das zweite Φ_2 über S_2. Dann ist

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

also

$$\Delta\,\Phi = \Delta\,\Phi_1 + \Delta\,\Phi_2$$

Nun ist nach den Ausführungen auf S. 30 $\Delta\,\Phi_2 = 0$. Auf Φ_1 können wir unsere letzten Betrachtungen anwenden und finden dann

$$\Delta\,\Phi = -\,4\,\pi\,\mu_P.$$

Es läßt sich wieder leicht beweisen, daß eine Funktion eindeutig bestimmt ist, wenn sie im ganzen Raum die POISSONsche Gleichung erfüllt und das Produkt der Funktion und ihrer Ableitung in willkürlicher Richtung im Unendlichen von höherer als zweiter Ordnung gegen Null konvergiert. Würden nämlich zwei Funktionen diesen Bedingungen genügen, so müßte ihre Differenz überall die LAPLACEsche Gleichung erfüllen und darum nach den Ausführungen von S. 31 überall identisch Null sein.

Erstes Kapitel.

Vektoren im elektromagnetischen Feld; Ableitung der Hauptgleichungen.

Zwei Hauptgleichungen bilden die Fundamente der Elektrizitätstheorie; es sind die sogenannten Maxwellschen Gleichungen. Durch sie werden Beziehungen zwischen verschiedenen Vektoren aufgestellt, und auf diese Weise wird das elektromagnetische Feld beschrieben. Die Eigenschaften der betreffenden Vektoren und ihre Abhängigkeiten voneinander sind ursprünglich durch Beobachtungen in einzelnen Sonderfällen aufgefunden worden. Die Verallgemeinerung auf Grund theoretischer Überlegungen führte dann zu den obengenannten Gleichungen, die wir im folgenden stets als gültig erachten werden.

§ 1. Der elektrische Strom.

An erster Stelle betrachten wir den Vektor, der den elektrischen Strom darstellt. Wir wollen ihn mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Zunächst hat der Vektor die Eigenschaft, stets solenoidal zu sein, d. h., das Strömen der Elektrizität verläuft immer analog dem Strömen einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Diese Eigenschaft wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\int \mathfrak{C}_n \, d\sigma = 0, \tag{1}$$

wobei das Integral über eine beliebige, geschlossene Fläche zu erstrecken ist. Die Gleichung ist, wie wir früher zeigten, gleichwertig mit

$$\operatorname{div} \mathfrak{C} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial z} = 0. \tag{1'}$$

Für Unstetigkeitsflächen ist als Bedingung zuzufügen:

$$\mathfrak{C}_{nI} = \mathfrak{C}_{nII}. \tag{1''}$$

Die Allgemeingültigkeit von Gleichung (1) ist eine der wesentlichsten Grundlagen der MAXWELLschen Theorie.

In der alten Elektrizitätstheorie unterschied man zwei Arten von Strömen: geschlossene und nicht geschlossene, anders ausgedrückt, solenoidale und nicht solenoidale. Zu den geschlossenen Strömen gehört z. B. der Strom in einem geschlossenen Kreis, der von einem galvanischen Element aufrecht erhalten wird. In der alten und in der neuen Theorie ist die Auffassung über diese Art Ströme genau die gleiche, der Strom ist in jedem Fall solenoidal. Zu den nicht geschlossenen Strömen zählte man z. B. den Strom, der einen Leiter auflädt, wobei der eine Pol einer Stromquelle mit dem Leiter, der andere mit der Erde verbunden ist. In der modernen Elektrizitätslehre müssen wir jedoch mit FARADAY und MAXWELL annehmen, daß der Strom nur scheinbar im Leiter endigt, sich in Wirklichkeit hingegen in das umgebende Medium fortpflanzt. Er kann dann sehr wohl solenoidal sein und ist es in der Tat auch.

Diesen Strom, der im umgebenden Dielektrikum in Erscheinung tritt, während ein Leiter geladen wird, nennen wir Verschiebungsstrom. Immer dann ist ein Verschiebungsstrom vorhanden, wenn der Strom scheinbar nicht solenoidal ist, und es gibt viele Erscheinungen, bei denen das der Fall ist.

Mit Hilfe unseres Vektors C beschreiben wir nun eine Reihe sehr verschiedenartiger Phänomene. Wir führen als Beispiele an: den galvanischen Strom in metallischen Drähten und in Elektrolyten, den Strom bei einer elektrischen Entladung, der entsteht, wenn z. B. zwischen einem positiv und einem negativ aufgeladenen Körper ein Funke überspringt, ferner Kathodenstrahlen; darunter verstehen wir einen Konvektionsstrom aus sehr kleinen, negativ geladenen Partikeln (sehr viel kleiner als elektrolytische Ionen), die man Elektronen nennt.

Das Gleichartige bei all diesen Erscheinungen beruht in der Wirkung der Ströme auf einen Magneten. Durch die Untersuchungen von OERSTEDT ist diese Wirkung bei galvanischen Strömen in metallischen Leitern seit langem bekannt, ebenso weiß man seit geraumer Zeit, daß Ströme in Elektrolyten und Ströme, die einen aufgeladenen Leiter entladen, eine Magnetnadel beeinflussen. Die Wirkung von Kathodenstrahlen auf einen Magneten hat GEITEL nachgewiesen. Darüber, ob ein Konvektionsstrom von größeren

Elektrizitätsträgern magnetisch wirkt, herrschte lange Zeit Zweifel. Im Jahre 1878 hat dann aber ROWLAND im Institut von HELMHOLTZ eine Reihe von Untersuchungen durchgeführt, bei denen im wesentlichen eine hoch aufgeladene Ebonitscheibe um eine Achse durch ihren Mittelpunkt mit möglichst großer Geschwindigkeit gedreht wurde. Diese Scheibe hatte nun in der Tat den gleichen Einfluß auf einen Magneten wie ein gewöhnlicher galvanischer Kreisstrom. Später haben ROWLAND und HUTCHINSON in Baltimore exaktere Versuche dieser Art angestellt und haben daraus, sogar mit recht großer Genauigkeit, das Verhältnis der elektrostatischen zur elektromagnetischen Elektrizitätseinheit ableiten können.

Wohl hat später CRÉMIEUX bei den gleichen Versuchen negative Resultate erhalten (wofür sich keine andere Erklärung finden läßt, als daß von der hoch aufgeladenen Ebonitscheibe, mit der auch er arbeitete, ein großer Teil der Ladung bereits abgeflossen war, bevor er zu beobachten begann), doch sind diese Untersuchungen von verschiedenen Physikern wiederholt worden und haben zu den gleichen Resultaten wie die ersten Versuche geführt, selbst bis auf eine recht befriedigende Übereinstimmung der numerischen Daten.

Die erste Hauptgleichung gibt die Beziehung zwischen dem elektrischen Strom und diesen magnetischen Wirkungen an.

§ 2. Die magnetische Kraft.

Um die magnetischen Wirkungen zu beschreiben, führen wir einen Vektor H ein, die magnetische Feldstärke oder Kraft, worunter wir die auf einen Nordpol von der Stärke 1 ausgeübte Kraft verstehen. Da die Eigenschaften dieses Vektors und seine Beziehung zum Vektor C vom Medium abhängig sind, wollen wir zuerst nur Luft als Medium zulassen. Für Luft können wir auch den magnetischen Vektor als solenoidal ansehen. Folglich gilt für jede geschlossene Oberfläche:

$$\int \mathrm{H}_n \, d\sigma = 0$$

oder

$$\operatorname{div} \mathrm{H} = 0$$

und für Unstetigkeitsflächen $\mathrm{H}_{n\,I} = \mathrm{H}_{n\,II}$.

In Annäherung gelten diese Gleichungen für alle Medien mit einigen Ausnahmen, zu denen vor allem Eisen und Stahl gehören.

Man kann leicht zeigen, daß die magnetische Kraft in einem Felde, das von einem oder mehreren Magneten herrührt und das nach dem COULOMBschen Gesetz berechenbar ist, der oben aufgestellten Beziehung genügt.

In diesem Fall hängt außerdem die magnetische Kraft von einem Potential ab, mathematisch ausgedrückt: das Linienintegral $\int_P^Q H_s \, d\,s$ ist unabhängig vom Integrationsweg, oder auch: das Linienintegral über eine geschlossene Kurve ist Null, wobei allerdings der Integrationsweg nicht durch einen der Magnetpole verlaufen darf. Nennen wir das magnetische Potential V, so ist (s. S. 23)

$$H_h = -\frac{\partial V}{\partial h}. \tag{2}$$

§ 3. Die magnetische Kraft, die durch einen geschlossenen Stomkreis hervorgerufen wird.

Wir wollen jetzt das Linienintegral der magnetischen Kraft auch in anderen Fällen näher untersuchen. Als Erfahrungstatsache stellen wir voran: ein Strom in einem sehr kleinen, kreisförmigen Leiter wirkt auf einen weit entfernten Magnetpol (der Abstand soll groß im Vergleich zum Kreisradius sein) wie ein sehr kleiner Magnet, dessen Achse senkrecht zur Ebene der Strombahn steht und dessen Moment proportional der Fläche der Kreisbahn und der Stromstärke ist. Der Nordpol des Magneten zeigt hierbei nach der Seite, nach der man das der positiven Stromrichtung entsprechende positive Lot auf der Strombahnebene zu errichten hat. Ist also i die Stromstärke, $d\,\sigma$ die Fläche der Kreisbahn und geben wir dem in seiner Wirkung äquivalenten kleinen Magneten die Polstärke m und die Länge δ, so können wir setzen

$$m\,\delta = f\,i\,d\,\sigma, \tag{3}$$

wo f ein Koeffizient ist, der von der Wahl der Einheiten für den Strom und die Polstärke abhängt, und den wir noch näher zu bestimmen haben.

Zunächst wenden wir diese Erkenntnis auf Ströme in unendlich kleinen Kreisbahnen an. Um überzugehen auf Kreisströme von endlichen Abmessungen, machen wir von einem zweiten Erfahrungssatz Gebrauch, der aussagt, daß entgegengesetzt gleiche Ströme in zusammen-

fallenden Bahnen sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben. Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Wirkung eines endlichen Kreisstromes ersetzen durch die unendlich vieler von unendlich kleinen Abmessungen, die in ihrer Gesamtheit netzförmig über eine Fläche O mit der gegebenen Strombahn als Rand verteilt sind; die Richtung des Stromes in jeder der Kreisbahnen soll dabei so bestimmt sein, daß der Strom jedes Element der Randkurve nur einmal, und zwar in Richtung des gegebenen Stromes durchläuft, während er durch die anderen Bahnelemente sowohl in der einen als auch in der entgegengesetzten Richtung fließt. Die Stromstärke ist in allen Bahnen die gleiche wie die des gegebenen Stromes. Ersetzen wir nun jeden der Elementarstromkreise in der oben angegebenen Weise durch einen kleinen Magneten und wählen wir der Einfachheit halber für alle die sehr kleine Länge δ, so erhalten wir auf beiden Seiten der Fläche O Schichten, deren eine lauter magnetische Nordpole und deren andere nur magnetische Südpole von gleicher Polstärke pro Flächeneinheit trägt. Diese magnetische Doppelschicht kann nun, solange wir nicht Punkte in der Schicht selbst betrachten, die magnetische Wirkung unseres Stromkreises ersetzen.

Wir wollen zunächst das Potential für einen unendlich kleinen Stromkreis in Punkten bestimmen, die sich in endlichem Abstand von der Kreisbahn befinden. Wir ersetzen den Stromkreis durch einen Magneten $(-m, +m)$ (s. Fig. 6) von der Länge δ. Das Potential in einem Punkte P im Abstande r beträgt, wenn die Verbindungsgerade zwischen P und einem Punkt des Magneten mit der Richtung des Magneten den Winkel α bildet:

Fig. 6.

$$f_1\left(\frac{m}{r}-\frac{m}{r+dr}\right)=f_1\frac{m}{r^2}\delta\cos\alpha$$

wobei f_1 ein Faktor ist, der von der Wahl der Einheit für die Polstärke abhängt. Setzen wir $f f_1 = k$, so ergibt sich hieraus durch Einsetzen:

$$f f_1 i\frac{d\sigma\cos\alpha}{r^2}=k\cdot i\cdot d\omega,$$

wenn $d\omega$ den Öffnungswinkel bedeutet, unter dem die Fläche der Kreisbahn $d\sigma$ von P aus gesehen wird. Wir wollen $d\omega$ positiv zählen, wenn P auf derselben Seite des Elementes $d\sigma$ wie der Nordpol des Magneten liegt, d. h. wenn $\sphericalangle \alpha$ spitz ist.

Für das Potential eines endlichen Stromkreises in einem Punkt P außerhalb der Bahnfläche finden wir ebenso $k\,i\,\Omega$, wo i die Stromstärke bedeutet und Ω den Öffnungswinkel, unter dem die Kreisbahn von P aus erscheint.

Man beachte, daß Ω je nach den Umständen sowohl positiv als auch negativ sein kann, und daß für einen gegebenen Stromkreis und einen gegebenen Punkt P verschiedene Werte von Ω und somit auch für das Potential angenommen werden können. Hat nämlich der Öffnungswinkel den absoluten Wert Ω, so ist der zweite Kegel mit dem Öffnungswinkel Ω', der Ω zu 4π ergänzt, gleichberechtigt. Sind z. B. σ und σ' zwei magnetische Doppelschichten, die beide in der angegebenen Weise einen gegebenen Stromkreis S ersetzen können, diesen Stromkreis also als Randkurve besitzen, und ist ihre Form so gewählt, daß P zwischen beiden liegt, so ist, wenn man für das zu σ gehörende Ω das positive Vorzeichen wählt, das zu σ' gehörige Ω' mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Die zwei Werte, die man für das Potential in P findet, sind dann $k\,i\,\Omega$ und $-k\,i\,\Omega' = k\,i\,(\Omega - 4\pi)$; sie unterscheiden sich durch ein konstantes Glied. Durch Differentiation leitet man aus beiden dieselbe magnetische Kraft ab.

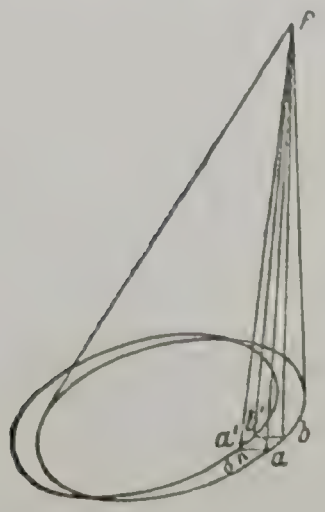

Fig. 7.

Die Wahl des Öffnungswinkels ist allein an die Bedingung geknüpft, daß das Linienintegral der magnetischen Kraft längs einer Strecke PQ durch $k\,i\cdot(\Omega_P - \Omega_Q)$ gegeben ist, und Ω sich auf dem Wege PQ stetig ändert. Die Kurve PQ möge dabei die betreffende Doppelschicht nicht schneiden.

Die Wirkung eines Stromkreises darf man, und das ist wichtig, als Resultierende aus den Wirkungen der einzelnen Bahnelemente auffassen. Die Zusammensetzung läßt sich auf verschiedene Weise bewerkstelligen, eine sehr einfache Methode gibt das Gesetz von Biot und Savart an. Zu diesem Zweck suchen wir in einem beliebigen Punkte P die

Komponente der magnetischen Kraft in einer willkürlichen Richtung h auf. Sie ist $-\partial V/\partial h$. Um den Differentialquotienten $\partial V/\partial h$ zu berechnen, können wir, statt den Punkt P über den Abstand δh zu verschieben und für den verschobenen Punkt den neuen Wert von V, den wir V' nennen wollen, zu bestimmen, auch jedes Element des Leiters um $-\delta h$ verschieben und für den verschobenen Leiter V' aufsuchen. Es ist dann

$$V' - V = k\,i \cdot (\Omega' - \Omega),$$

und dieser Ausdruck stellt ebenso die Arbeit der auf den Einheitspol in P wirkenden Kraft bei einer Verschiebung des Poles um $+\delta h$ dar.

Wir kommen zum BIOT-SAVARTschen Gesetz, wenn wir die Gesamtänderung des Potentials $k\,i\,\Omega$ aufteilen in die Änderungen der Potentiale, die die einzelnen Stromelemente hervorrufen.

Ein solches Element in der Richtung des Stromes sei $a\,b$, und durch die angegebene Verschiebung gelange es nach $a'\,b'$, wobei $a\,a' = -\delta h$ ist. Läßt man nun längs der Umrandung des Parallelogramms $b\,a\,a'\,b'$ in der Richtung, die die Reihenfolge der Buchstaben angibt, einen Strom i fließen und verfährt mit den anderen Elementen in ganz analoger Weise, so werden alle diese Ströme zusammen, der ursprüngliche und die neu hinzukommenden, gerade den Strom i in der verschobenen Bahn ergeben. Die dem Stromelement $a\,b$ entsprechende Potentialänderung $V - V'$ läßt sich also durch das Potential des Stromes $b\,a\,a'\,b'$ im Punkte P ersetzen. Bei Einsetzen des richtigen Vorzeichens erhält man hierfür das Produkt von $k\,i$ mit dem Öffnungswinkel $P \cdot b\,a\,a'\,b'$. Hierfür kann man schreiben

$$\frac{k\,i}{r^3}([\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}] \cdot \mathfrak{C}),$$

wenn die Vektoren $a\,a'$, $a\,b$ und $a\,P$ bzw. durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ angegeben werden. Der Inhalt, nämlich, des durch die drei Vektoren gebildeten Parallelopipedons beträgt $([\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}] \cdot \mathfrak{C})$ und dieser, mit $1/r^3$ multipliziert, ergibt die Kegelöffnung. In bezug auf das Vorzeichen läßt sich aussagen: $([\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}] \cdot \mathfrak{C})$ ist positiv, wenn $\mathfrak{C}$ nach der Seite der Fläche $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ weist, die einer Drehung über den überstumpfen Winkel von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ entspricht, mit anderen Worten, wenn P auf der Seite der Fläche liegt, die dem Richtungssinn $b\,b'\,a'\,a$ entspricht.

Der gefundene Ausdruck läßt sich umformen in

$$\frac{k\,i}{r^3}(\mathfrak{A} \cdot [\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}]),$$

(vgl. Gl. 9 S. 4); bei dieser Schreibweise wird unmittelbar deutlich, daß man von der magnetischen Wirkung eines Kreisstromes Rechenschaft geben kann, falls man annimmt, daß das Stromelement $a\,b$ die magnetische Kraft

$$\frac{k\,i}{r^3}[\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}]$$

erzeugt. Bei einer Verschiebung um $a\,a' = \mathfrak{A}$ wird die Arbeit dieser Kraft durch den oben angegebenen Ausdruck wiedergegeben.

Für die magnetische Kraft kann man auch schreiben

$$k\,i\,[d\,s \cdot 1/r^2], \tag{4}$$

wenn man $1/r^2$ als einen Vektor in der Richtung $a\,P$ vom Stromelement nach dem betrachteten Punkt ansieht. Die Kraft hat den Wert

$$\frac{k\,i \sin \Phi\, d\,s}{r^2},$$

wenn Φ der Winkel zwischen dem Stromelement und $a\,P$ ist und wenn die Richtung der Kraft einer Drehung von $a\,P$ zum Stromelement über den überstumpfen Winkel entspricht.

Wir wollen nun im Feld eines elektrischen Stromes das Linienintegral der magnetischen Kraft näher untersuchen, haben dabei aber zwischen solchen Integrationswegen zu unterscheiden, die ganz außerhalb des Stromkreises liegen und solchen, die durch den Stromkreis verlaufen. Für die ersteren können wir den Kreis durch eine magnetische Doppelschicht ersetzen, die keinen Punkt mit dem Integrationsweg gemeinsam hat und darum auf alle Punkte dieses Weges dieselbe Kraft wie unser Strom ausübt. In diesem Falle muß nun ohne weiteres das Linienintegral verschwinden, denn nach Durchlaufen der geschlossenen Kurve hat der Winkel Ω der Kegelöffnung wieder den ursprünglichen Wert.

Betrachten wir nun einen Integrationsweg, der einmal den Stromkreis schneidet. Wir konstruieren wieder die magnetische Doppelschicht, die also vom Integrationsweg geschnitten wird. A und A' seien zwei Punkte dieses Weges zu beiden Seiten der

Doppelschicht und sehr nahe an ihr gelegen und $A\,A'$ gebe die Integrationsrichtung an. Das betrachtete Linienintegral wird sich nur sehr wenig von $\int_{A'}^{A} \mathrm{H}_s\, d\,s$ unterscheiden, wenn das Integral über die geschlossene Kurve mit Auslassung des kleinen Stückes $A\,A'$ erstreckt wird. H läßt sich mit Hilfe der magnetischen Doppelschicht berechnen, die uns für alle Punkte des Weges zwischen A' und A genau den richtigen Wert liefert. Der Unterschied der beiden Integrale ist das Integral erstreckt über die Strecke $A\,A'$ und dieses kann beliebig klein gemacht werden, wenn man den Abstand $A\,A'$ nur genügend klein wählt.

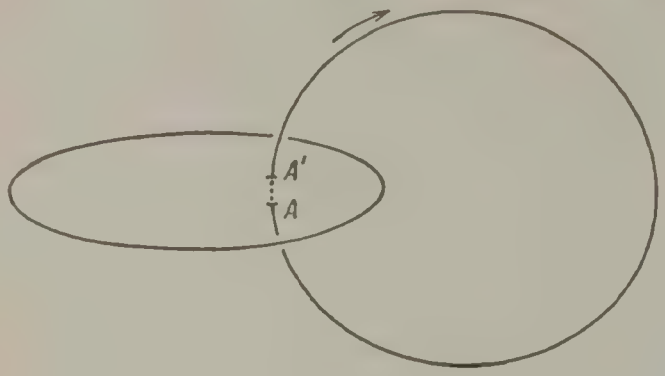

Fig. 8.

Der Wert der durch den Strom ausgeübten magnetischen Kraft nämlich ist an dieser Stelle endlich, was ohne weiteres folgt, wenn wir eine andere magnetische Doppelschicht konstruieren.

Wir können also schreiben:

$$\int \mathrm{H}_s\, d\,s = \int_{A'}^{A} \mathrm{H}_s\, d\,s = -\int_{A'}^{A} \frac{\partial V}{\partial s}\, d\,s = V_{A'} - V_A\,.$$

Das Vorzeichen des Integrals ändert sich, wenn wir den Integrationsweg in umgekehrtem Sinn durchlaufen, wir wollen darum annehmen, daß die Richtung von A nach A' der Stromrichtung entspricht. Nach der oben abgeleiteten Gleichung ist

$$V_{A'} - V_A = k \cdot i \cdot (\Omega_{A'} - \Omega_A)\,.$$

Man kann sich nun leicht überzeugen, daß, wenn im Punkt A' der Öffnungskegel $\bar{\Omega}$ einen bestimmten positiven Wert hat (vgl. S. 46), der Wert in A wegen der Bedingung stetiger Veränderung gleich $\bar{\Omega} - 4\,\pi$ wird. Im Fall, den Fig. 8 darstellt (ebener Stromkreis und ebene Doppelschicht), beträgt der Anfangswert $+ 2\,\pi$ und der Endwert $- 2\,\pi$. Im ganzen ergibt sich also:

$$\int \mathrm{H}_s\, d\,s = 4\,\pi\,k\,i. \qquad (5)$$

§ 4. Ableitung der ersten MAXWELLschen Gleichung.

Wir haben bisher stets nur lineare Kreisströme behandelt. Ist der Strom räumlich in drei Dimensionen ausgedehnt (welcher Fall natürlich allein der Wirklichkeit entspricht), so können wir ihn in Stromröhren aufteilen. Die Wirkung des Gesamtstromes in einem Punkt außerhalb des Stromkreises finden wir durch Superposition aus derjenigen der einzelnen Stromröhren. Da die Röhren alle geschlossen sind, läßt sich die Wirkung einer jeden wie oben berechnen. Für einen Punkt innerhalb des Raumes der Stromröhren gelten die Sätze hingegen nicht.

Um auch diese Fälle zu behandeln, müssen wir zunächst unsere früheren Resultate in einer anderen Form schreiben. Für einen linearen Kreisstrom läßt sich die Kraft in einem Punkt $P(x, y, z)$, der nicht auf dem Kreis liegt, mit Hilfe des BIOT-SAVARTschen Gesetzes bestimmen. Wir haben dann die Komponenten der Beiträge zur magnetischen Kraft für jedes Element des Kreises gesondert zu berechnen und erhalten die Komponenten des gesuchten Vektors durch Integration über den ganzen Kreis. Dies ergibt nach (4), wenn wir die Koordinaten eines Punktes des Elementes $d s_1$, mit x_1, y_1, z_1 bezeichnen und die Komponenten von $d s_1$ mit $d x_1, d y_1, d z_1$ (die Indizes zur Unterscheidung von den Größen, die sich auf den Punkt P beziehen, für den wir die magnetische Kraft bestimmen wollen):

$$\mathrm{H}_x = k i \cdot \int \left(d y_1 \frac{z - z_1}{r^3} - d z_1 \frac{y - y_1}{r^3} \right)$$

$$\mathrm{H}_y = k i \cdot \int \left(d z_1 \frac{x - x_1}{r^3} - d x_1 \frac{z - z_1}{r^3} \right)$$

$$\mathrm{H}_z = k i \cdot \int \left(d x_1 \frac{y - y_1}{r^3} - d y_1 \frac{x - x_1}{r^3} \right).$$

Wir führen jetzt einen Hilfsvektor ein, dessen Komponenten

$$\mathrm{F}_x = k i \int \frac{d x_1}{r}, \quad \mathrm{F}_y = k i \cdot \int \frac{d y_1}{r}, \quad \mathrm{F}_z = k i \cdot \int \frac{d z_1}{r} \tag{6'}$$

sind, und der Vektorpotential genannt wird. Wir finden dann für H

$$\mathrm{H} = \mathrm{rot}\, \mathrm{F}. \tag{7}$$

Haben wir es mit einer Strömung im dreidimensionalen Raum zu tun und beschränken wir uns zunächst darauf, die magnetische

Kraft in einem Punkt im Raume außerhalb des Stromkreises zu bestimmen, so können wir für jede der Stromröhren — die wir durch den Index ν voneinander unterscheiden — nach den obenstehenden Gleichungen ein Vektorpotential $\mathfrak{F}_\nu$ angeben; Gleichung (7) gilt dann, falls wir setzen: $\mathfrak{F} = \Sigma \mathfrak{F}_\nu$ und die Summation über alle Stromröhren erstrecken. In den Gleichungen für die Komponenten von $\mathfrak{F}_\nu$ werden wir an Stelle der Stromstärke i_ν in der Stromröhre den Vektor $\mathfrak{C}$ einführen. Ist ω_ν der Querschnitt der Stromröhre, so ist in jedem Punkt der Röhre $\mathfrak{C} = i_\nu/\omega_\nu$, und wir erhalten unter Einführung der Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1, den das Element ds_1 und gleichzeitig der Vektor $\mathfrak{C}$ mit dem Achsenkreuz bildet:

$$F_x = k \cdot \Sigma \int \frac{i\, dx_1}{r} = k \cdot \Sigma \int \frac{\mathfrak{C}\, \omega_\nu\, ds_1 \cos \alpha_1}{r}$$

und Entsprechendes für die anderen Komponenten.

In dieser Gleichung bezieht sich die Integration auf die einzelnen Elemente einer Stromröhre und die Summation auf die verschiedenen Stromröhren. Diese unterschiedliche Behandlung ist aber nichts Wesentliches, das gleiche Resultat läßt sich durch eine einzige Raumintegration erhalten, wenn $\omega_\nu\, ds_1 = dS_1$ ein Raumelement bedeutet. Die Integration wird dann über den ganzen Raum erstreckt, denn die Raumelemente, in denen kein Strom fließt, tragen nichts zum Integral bei, da dort der Vektor $\mathfrak{C} = 0$ ist. Wir erhalten also

$$F_x = k \cdot \int \frac{\mathfrak{C}_x}{r}\, dS_1, \quad F_y = k \cdot \int \frac{\mathfrak{C}_y}{r}\, dS_1, \quad F_z = k \cdot \int \frac{\mathfrak{C}_z}{r}\, dS_1 \qquad (6)$$

und wieder wie oben

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{F}. \qquad (7)$$

Hieraus folgt $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$, und somit ist bewiesen, daß der auf diese Weise berechnete Vektor solenoidal ist.

Um das Linienintegral zu bestimmen, berechnen wir zunächst $\operatorname{rot} \mathfrak{H}$. Wir erhalten

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right).$$

Nun ist zunächst außerhalb des Stromgebietes

$$\Delta F_x = k \cdot \int \mathfrak{C}_x \Delta \frac{1}{r}\, dS_1 = 0$$

und ferner

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = k \cdot \int \left(\mathfrak{C}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{C}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{C}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right) dS_1$$

$$= -k \int \left(\mathfrak{C}_x \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{C}_y \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{C}_z \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r}\right)\right) dS_1$$

$$= -k \int \frac{1}{r} \mathfrak{C}_n \, d\sigma_1 + k \int \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{C} \, dS_1,$$

wobei, wenn das Raumintegral über den stromdurchflossenen Raum erstreckt wird, der erste Term ein Integral über die den Raum begrenzende Fläche darstellt; dort ist aber notwendig $\mathfrak{C}_n = 0$. Auch der letzte Term verschwindet, da $\operatorname{div} \mathfrak{C} = 0$ ist, mithin ist auch $\operatorname{div} \mathfrak{F} = 0$. Es ist ein leichtes, diesen Beweis für den Fall zu verallgemeinern, wo im stromdurchflossenen Raum Flächen mit unstetigem $\mathfrak{C}$ auftreten (die oben vorgenommene partielle Integration ist für die Raumteile gesondert durchzuführen, an deren beiden Seiten Unstetigkeitsflächen auftreten, und dabei ist zu berücksichtigen, daß $\mathfrak{C}_n$ dort stetig ist).

Wir erhalten also:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = 0$$

und gleicherweise:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = 0$$

also

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0 .$$

Hieraus folgt wieder, daß längs des Randes einer Fläche, die ganz außerhalb des stromdurchflossenen Gebietes liegt, das Linienintegral der magnetischen Kraft verschwindet.

Innerhalb des Strombereiches, wo $\mathfrak{C}$ von Null verschieden ist, werden wir jetzt in gleicher Weise einen Vektor $\mathfrak{H}$ bestimmen, und diesen die magnetische Kraft nennen. Zunächst werden wir die Eigenschaften dieses Vektors untersuchen und uns dann überlegen, welche physikalische Bedeutung dem so definierten Vektor zukommt.

Aus den Betrachtungen von S. 33 folgt, daß auch in diesem Fall die Komponenten von $\mathfrak{F}$ durch Gleichung (6) vollständig bestimmt und nebst ihren ersten Ableitungen endlich und stetig sind. Ebenso sind die zweiten Ableitungen endlich.

Ferner bleibt bestehen $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$, da dies unmittelbar aus $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{F}$ folgt und unabhängig von den besonderen Eigenschaften von $\mathfrak{F}$ ist. Ebenso gilt wieder

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = -\Delta \mathfrak{F}_x + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathfrak{F} \quad \text{usf.}$$

Aus Gl. (35) auf S. 38 läßt sich ableiten, daß weiter $\operatorname{div} \mathfrak{F} = 0$ bleibt, jedoch wird $\Delta \mathfrak{F}_x = -4\pi k \mathfrak{C}_x$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} &= 4\pi k \mathfrak{C}_x \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} &= 4\pi k \mathfrak{C}_y \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} &= 4\pi k \mathfrak{C}_z \end{aligned} \tag{8}$$

oder, in einer Gleichung geschrieben,

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi k \mathfrak{C}. \tag{8'}$$

Diese Beziehung gilt natürlich im gänzen Raum, denn in einem stromlosen Punkt geht sie in die früher gefundene $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$ über.

Gleichung (8') ist die erste MAXWELLsche Gleichung, die wir im folgenden als allgemeingültig annehmen werden. Die beiden gefundenen Eigenschaften des Vektors $\mathfrak{H}$ lassen sich auch folgendermaßen zusammenfassen:

$$\int \mathfrak{H}_n \, d\sigma = 0$$

für jede geschlossene Fläche, und

$$\int \mathfrak{H}_s \, ds = 4\pi k \cdot \int \mathfrak{C}_n \, d\sigma_1$$

wobei das erste Integral über eine beliebige, geschlossene Kurve zu erstrecken ist und das zweite über eine Fläche, deren Umrandung diese Kurve bildet. Da die Beziehung für jede beliebige Fläche gültig ist, so folgt wieder, daß für jede geschlossene Fläche $\int \mathfrak{C}_n \, d\sigma = 0$ ist.

Wenn der Vektor $\mathfrak{C}$ in jedem Raumpunkt gegeben ist, so ist damit auch überall $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt (s. S. 32).

Wir müssen nun untersuchen, welche physikalische Bedeutung dem soeben eingeführten Vektor $\mathfrak{H}$ zukommt. Zu diesem Zwecke wollen wir die Kraft berechnen, die auf einen Einheitsnordpol wirkt;

dabei haben wir uns den Einheitspol in einen Hohlraum innerhalb des Stromleiters gebracht zu denken, und zwar soll der Hohlraum den Punkt umschließen, für den wir den Vektor H berechnet haben. Streng genommen ist nun diese Kraft nicht die durch den betrachteten elektrischen Strom verursachte magnetische Kraft, da die Anbringung des Hohlraumes eine Störung verursacht. Es läßt sich aber beweisen, daß die gesuchte Kraft sich dem Wert des Vektors H nähert, falls die Abmessungen des Hohlraumes unbegrenzt abnehmen und zwar unabhängig davon, in welcher Weise der Stromlauf gestört wurde.

Nennen wir die wirkliche Kraft auf den Einheitsnordpol in dem Hohlraum H', so verlangen wir also, daß gelten soll: $\lim H'_x = H_x$. Nun ist H'_x die Komponente der magnetischen Kraft in einem Raum, in dem kein Strom fließt. Darum folgt:

$$H'_x = \frac{\partial F'_z}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial z},$$

wobei

$$F'_z = k \cdot \int \frac{C'_x}{r} dS_1 \quad \text{usf.},$$

und C' den elektrischen Strom bedeutet, der unter den veränderten Bedingungen fließt; das Integral ist über den Raum außerhalb des Hohlraumes zu erstrecken. Da andererseits gilt:

$$H_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad \text{usf.},$$

so bleibt uns noch zu beweisen:

$$\lim \frac{\partial F'_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \text{usf.}$$

Man bildet zunächst den Differentialquotienten $\frac{\partial F'_z}{\partial y}$, indem man die Integrale $k \int C'_z \frac{\partial S_1}{r}$ für zwei dicht beieinander liegende Punkte berechnet und den Hohlraum beide Male von der Integration ausschließt; andererseits erhält man nach der Definition $\frac{\partial F_z}{\partial y}$, wenn man $k \cdot \int C_z \frac{dS_1}{r}$ für zwei beieinander liegende Punkte auswertet, bei der Integration aber je eine kleine Kugel um jeden der zwei

Punkte ausschließt und schließlich den Limes bestimmt, wenn diese Kugeln unbegrenzt abnehmen. Nach den Betrachtungen in der Einleitung hat aber dieser Unterschied in den Integrationsräumen keinen Einfluß auf das Resultat. Ferner darf man ohne Bedenken annehmen, daß der Einfluß des Hohlraumes, falls dieser unendlich klein wird, den Wert von C in endlichem Abstand vom Hohlraum nicht mehr merklich beeinflußt. Die Differenz zwischen $\frac{\partial F'_z}{\partial y}$ und $\frac{\partial F_z}{\partial y}$ beträgt

$$k \cdot \int (C'_z - C_z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \, dS_1,$$

wobei über den Raum rings um den Hohlraum herum integriert wird; wegen der schnellen Abnahme von $C'_z - C_z$ nach außen hin kann allein die nächste Umgebung des Hohlraumes einen merklichen Beitrag zum Integral liefern. Wir wollen annehmen, daß bei einer bestimmten Größe des Hohlraumes der umliegende Raum in irgendeiner Weise in Elemente aufgeteilt sei, und daß dann die Dimensionen der ganzen Figur p mal kleiner gemacht werden. Bei diesem Zusammenschrumpfen eines jeden Elementes, das dabei p^3 mal kleiner wird und p mal näher an den Mittelpunkt heranrückt, nehmen wir weiter an, die Störung $C'_z - C_z$ bleibe konstant. Dann wird jedes Integralelement und damit auch das ganze Integral p mal kleiner, so daß es bei Zunahme von p sich dem Wert Null nähert. Also gilt wirklich

$$\lim \frac{\partial F'_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \text{usf.}$$

woraus der oben behauptete Satz folgt.

§ 5. Magnetisierbare Substanzen.

In aller Strenge gelten die vorhergehenden Betrachtungen nur für den Äther als Medium. Für Luft und die meisten anderen Substanzen sind sie in großer Annäherung gültig; sobald wir es aber mit Eisen als Medium zu tun haben, liegen die Verhältnisse ganz anders, ebenso, wenn auch in vermindertem Maße, für einige andere Substanzen wie z. B. Nickel und Kobalt. Diese Stoffe üben, sobald sie einer magnetischen Kraft unterworfen sind, selbst magnetische Wirkungen aus.

Wir können die Wirkungen beschreiben, wenn wir in den sehr kleinen Volumelementen dieser Körper nord- und südmagnetische Pole, oder, anders ausgedrückt, positive und negative Magnetismusmengen μ annehmen. Dabei muß für jeden endlichen Volumteil, d. h. für jedes Volumen, das unserer Wahrnehmung überhaupt noch zugänglich ist, $\Sigma \mu = 0$ sein. Wir werden nun die Beziehung $\Sigma \mu = 0$ auch für Raumelemente als gültig annehmen, die wir im allgemeinen als unendlich klein (d. h. physikalisch unendlich klein) ansehen. Wenn wir das Potential aufsuchen, das solch ein kleines Volumteilchen mit magnetischen Polen in einem Punkt des Außenraumes erzeugt, so haben wir $f_1 \cdot \Sigma \frac{\mu}{r}$ zu bilden, wobei f_1 der schon früher (S. 45) eingeführte Koeffizient ist. Wir wählen einen Punkt im Volumelement als Nullpunkt eines neuen Koordinatensystems, dessen Achsen denen des alten parallel verlaufen. Nennen wir die neuen Koordinaten eines Punktes im Volumelement x, y, z, ferner r dessen Abstand von dem Punkt, in dem das Potential bestimmt werden soll und r_o die Entfernung dieses letzteren Punktes vom Nullpunkt des neuen Koordinatensystems, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_o} + \mathrm{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_o}\right) + \mathrm{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_o}\right) + \mathrm{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_o}\right) + \cdots,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_o}\right)$ den Wert angibt, den $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$ im neuen Nullpunkt annimmt. Wir erhalten also:

$$\Sigma \frac{\mu}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_o}\right) \Sigma \mu \mathrm{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_o}\right) \Sigma \mu \mathrm{y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_o}\right) \Sigma \mu \mathrm{z} + \cdots,$$

wobei, falls das Volumelement genügend klein ist, die weiteren Terme vernachlässigt werden können.

Die Größen $\Sigma \mu \mathrm{x}$, $\Sigma \mu \mathrm{y}$, $\Sigma \mu \mathrm{z}$ sind unabhängig von der Wahl des Nullpunktes in dem Volumteilchen, da $\Sigma \mu = 0$ ist. Wir können sie als Komponenten eines Vektors auffassen, der seinerseits auch von der Richtung des Achsenkreuzes unabhängig ist. Um diese letztere Aussage zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß, wenn eine neue X_1-Achse die Winkel α_1, β_1, γ_1 mit den alten Achsen bildet, $\Sigma \mu \mathrm{x}_1$ die Projektion unseres Vektors auf die neue X-Achse ist. Dies folgt nun ohne weiteres, da

$$\Sigma \mu \mathrm{x}_1 = \Sigma \mu (\mathrm{x} \cos \alpha_1 + \mathrm{y} \cos \beta_1 + \mathrm{z} \cos \gamma_1)$$
$$= \cos \alpha_1 \cdot \Sigma \mu \mathrm{x} + \cos \beta_1 \cdot \Sigma \mu \mathrm{y} + \cos \gamma_1 \cdot \Sigma \mu \mathrm{z} \quad \text{ist.}$$

Wir nennen diesen Vektor das magnetische Moment des betrachteten Volumteilchens. Das magnetische Moment pro Volumeinheit ist also auch ein Vektor; es ist im allgemeinen von Punkt zu Punkt verschieden und wird Magnetisierung genannt. Wir werden diesen Vektor durch den Buchstaben I bezeichnen. Für das Potential eines endlichen, magnetischen Körpers erhalten wir also

$$f_1 \cdot \int \left\{ \mathrm{I}_x \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathrm{I}_y \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathrm{I}_z \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} d S_1$$

$$= f_1 \cdot \int \frac{1}{r} \cdot \mathrm{I}_n \, d\sigma_1 - f_1 \cdot \int \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathrm{I} \, d S_1 .$$

Dieser Ausdruck besagt, daß ein magnetischer Körper nach außen eine solche Wirkung ausübt, als ob seine Oberfläche eine magnetische Oberflächendichte I_n besäße und in seinem Innern die Dichte $-\operatorname{div} \mathrm{I}$ vorhanden wäre.

Wollen wir nun die magnetischen Wirkungen innerhalb eines solchen magnetischen Körpers beschreiben, so fragen wir zunächst nach der Kraft, die in irgendeinem Punkt auf den Einheitspol ausgeübt wird. Auf diese Frage läßt sich aber, wenn wir sie nicht genauer präzisieren, keine bestimmte Antwort geben. Um die Kraft zu messen, müßten wir einen kleinen Magneten in einem Hohlraum im Körper anbringen, und es würde sich dann zeigen, daß die Kraft auf den Einheitspol nicht mehr von der Form des Hohlraumes unabhängig ist. Damit hängt zusammen, daß nicht mehr, wie oben, ein Vektor genügt, um die magnetischen Wirkungen zu beschreiben, wir gebrauchen vielmehr zwei Vektoren, die wir magnetische Kraft und magnetische Induktion nennen wollen, und die wir zunächst definieren müssen. Wir denken uns um einen Punkt P im magnetischen Körper einen Hohlraum angebracht, der die Magnetisierung im Außenraum nicht verändert, und in den Hohlraum einen Magnetpol gesetzt. Dieser befindet sich dann außerhalb der magnetischen Substanz, und nach unseren früheren Betrachtungen können wir die Wirkung, die auf ihn ausgeübt wird, aus drei Teilen zusammengesetzt denken: erstens der Wirkung der magnetischen Substanz mit der Oberflächendichte I_n, verteilt über die Außenoberfläche; sie ist unabhängig von der Form des Hohlraumes; zweitens der Wirkung der Substanz mit der Raumdichte $-\operatorname{div} \mathrm{I}$, verteilt über unseren magnetisierten Körper. Wir können, wie oben auf S. 54 für den Vektor F beweisen, daß sie unabhängig von der Form des Hohl-

raumes ist und sich einem Grenzwert nähert, wenn die Abmessungen des Hohlraumes unbegrenzt abnehmen. Drittens bleibt noch die Wirkung des Agens, das sich auf der Hohlraumoberfläche befindet. Nennen wir n die Richtung der Normalen vom Hohlraum nach dem magnetisierten Körper, so beträgt die Oberflächendichte $-\mathrm{I}_n$. Ihre Wirkung ist von der Form des Hohlraumes abhängig. Es läßt sich aber zeigen, daß sie sich einem bestimmten Grenzwert nähert, wenn der Hohlraum sich gleichförmig in den Punkt P zusammenzieht. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Differenz der Kräfte in P für zwei verschieden große aber ähnliche Hohlräume kleiner als irgendein vorgegebener Wert gemacht werden kann, wenn nur beide Hohlräume unterhalb einer bestimmten Größe bleiben; dann wird auch der Unterschied der beiden Grenzwerte von I, die in Betracht kommen, beliebig klein. Unter der Annahme, daß I in der Umgebung von P konstant ist, wollen wir die Kräfte vergleichen, die die Oberflächenladung je eines Elementes der beiden Hohlräume in P ausübt; die Oberflächenelemente sollen dabei auf demselben von P ausgehenden Elementarkegel liegen. Wir finden die Kräfte gleich groß, da die Ladungen dem Kegelquerschnitt und damit dem Quadrat des Abstandes von P proportional sind, während die Kraft pro Ladungseinheit dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist. Hieraus ergibt sich der Beweis der oben aufgestellten Behauptung ohne weiteres.

Zwei spezielle Formen des Hohlraumes wollen wir noch eingehender betrachten. Beide sind Zylinder, die den betrachteten Punkt P zum Mittelpunkt haben. Ihre Achse fällt beide Male mit der Richtung der Magnetisierung zusammen, nur seien für den ersten die Endflächen unendlich klein im Verhältnis zu den zylindrischen Mantelflächen (ein langgestreckter Zylinder) und für den zweiten umgekehrt die Endflächen unendlich groß im Vergleich zu den Seitenflächen (ein flacher Zylinder). Für die erste Form verschwindet die Wirkung, die die auf der Innenwand des Hohlraumes befindliche Substanz auf den in P gelegenen Magnetpol ausübt. Denn einerseits hat die zylindrische Mantelfläche keinen Einfluß, da dort $\mathrm{I}_n = 0$ ist. Die Wirkung der Endflächen andererseits, die sicherlich längs der Achse gerichtet ist, kann man nach folgendem, leicht zu beweisenden Satz berechnen: Ein Magnetpol m übt bekanntlich (vgl. S. 45) im Abstand r eine magnetische Kraft $f_1 \cdot \frac{m}{r^2}$ aus. Ist über

eine begrenzte, ebene Oberfläche Magnetismus gleichmäßig mit der Flächendichte α verteilt, so ist in einem beliebigen Punkt P die Normalkomponente der magnetischen Kraft (positiv von der Fläche fort gerechnet) proportional $f_1 \cdot \omega$, wo ω die Öffnung des Kegels bedeutet, der P zur Spitze und das mit Magnetismus geladene Flächenstück zur Grundfläche besitzt.

Nun besitzt an derjenigen Zylinderfläche, die in Richtung von I liegt, die Flächendichte den Wert $-I$[1]) und an der gegenüberliegenden den Wert $+I$. Die gesuchte gesamte magnetische Kraft hat die Richtung von I und den Wert: $f_1 \mathrm{I}\,(\omega_1 + \omega_2)$, wobei unter ω_1 und ω_2 die Kegelöffnungen zu verstehen sind, unter denen von P aus die Endflächen erscheinen. Diese sind aber beide Null, da die Höhe des Zylinders unendlich groß im Vergleich zu den Durchmessern der Endflächen ist. Die Kraft auf den Einheitspol in einem solchen Hohlraum, oder präziser ausgedrückt, der limes, dem sich die Kraft bei unbegrenzt abnehmendem Hohlraumvolumen nähert, wollen wir im magnetisierbaren Körper die magnetische Kraft nennen und ebenfalls mit dem Buchstaben H bezeichnen. Wir werden später untersuchen, inwieweit die Eigenschaften unseres früheren Vektors H gültig bleiben.

§ 6. Die magnetische Induktion.

Betrachten wir zunächst die zweite Spezialform unseres Hohlraumes, die des flachgedrückten Zylinders. Die zylindrischen Mantelflächen haben wieder keinerlei Einfluß. Die beiden Endflächen üben eine Kraft $f_1 \mathrm{I} \cdot (\omega_1 + \omega_2)$ aus, und wir erhalten, da die Höhe unendlich klein im Vergleich zu den Abmessungen der Endflächen ist, hierfür den Wert $4\pi f_1 \cdot \mathrm{I}$. Den Grenzwert, dem sich die Kraft auf einen Einheitsnordpol innerhalb eines so geformten Hohlraumes bei unbegrenzter Abnahme des Hohlraumvolumens nähert, wollen wir magnetische Induktion nennen und mit B bezeichnen. In jedem Punkt ist also:

$$\mathrm{B} = \mathrm{H} + 4\pi f_1 \mathrm{I}. \tag{9}$$

Im Raum außerhalb des magnetisierten Körpers ist $\mathrm{I} = 0$ und somit $\mathrm{B} = \mathrm{H}$. Dort besitzen also beide Vektoren die oben besprochenen

[1]) Wir werden im folgenden öfters den Wert des Vektors, ausgedrückt in Anzahl Einheiten, durch denselben Buchstaben wie den Vektor, aber in anderer Type gedruckt, darstellen.

Eigenschaften. Sind aber im betrachteten Feld magnetisierbare Körper vorhanden, so sind, um die magnetischen Wirkungen innerhalb dieser Körper anzugeben, die beiden Vektoren H und B notwendig. Wir werden sehen, daß die früher gefundenen Eigenschaften sich jetzt auf beide Vektoren verteilen.

Der Vektor H zunächst ist die Resultante aus der magnetischen Kraft, die bereits vor Anwesenheit des magnetischen Körpers, also unabhängig von ihm bestand, und den zwei ersten, im vorigen Paragraphen besprochenen Wirkungen. Da alle drei von einem Potential abhängen, so können wir auch bei der Resultante von einem magnetischen Potential sprechen, wir setzen also $H_h = -\frac{\partial V}{\partial h}$.

Außerhalb der magnetisierbaren Körper ist $\Delta V = 0$, also $\operatorname{div} H = 0$, innerhalb der Körper jedoch ergibt sich (da das Agens auf der Wandung des im vorigen Paragraphen eingeführten Hohlraumes keinen Einfluß auf H hat, der einzige Unterschied also durch die Raumladung mit der Dichte $-\operatorname{div} I$ hervorgerufen wird), nach der Potentialtheorie

$$\Delta V = 4\pi f_1 \operatorname{div} I$$

und somit

$$\operatorname{div} H = -4\pi f_1 \operatorname{div} I. \tag{10}$$

Der Vektor H ist also in diesem Fall nicht solenoidal.

Auch an den Unstetigkeitsflächen gelten andere Bedingungen. Wohl folgt aus dem Vorhergehenden, daß das Potential immer stetig ist und daß auch die Tangentialkomponenten von H an einer Unstetigkeitsfläche stetig sind, aber für die Normalkomponente finden wir:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_I - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{II} = 4\pi f_1 I_n,$$

wobei an der mit dem Index I bezeichneten Seite sich der magnetisierte Körper befindet, oder allgemeiner:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_I - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{II} = 4\pi f_1 \cdot \{(I_n)_I - (I_n)_{II}\}, \tag{11}$$

wenn auf jeder Seite ein magnetisierter Körper liegt.

Der Satz vom Linienintegral (die erste Maxwellsche Gleichung) bleibt jedoch unverändert bestehen.

Vom Vektor B können wir sehr leicht zeigen, daß er stets solenoidal ist. Für einen Punkt außerhalb des magnetisierten Körpers folgt es aus unseren früheren Betrachtungen, da dort B mit H zusammenfällt. Innerhalb des magnetisierten Körpers ergibt sich aus (9) und (10):

$$\operatorname{div} \mathrm{B} = \operatorname{div} \mathrm{H} + 4\pi f_1 \cdot \operatorname{div} \mathrm{I} = 0. \tag{12}$$

Dann ist für eine Unstetigkeitsfläche

$$(\mathrm{B}_n)_I - (\mathrm{B}_n)_{II} = (\mathrm{H}_n)_I + 4\pi f_1 (\mathrm{I}_n)_I - (\mathrm{H}_n)_{II} - 4\pi f_1 (\mathrm{I}_n)_{II} = 0. \tag{12'}$$

Folglich gilt für jede geschlossene Fläche:

$$\int \mathrm{B}_n \, d\sigma = 0. \tag{12''}$$

Von den zwei Gleichungen, die im freien Äther notwendig waren, um den Vektor H zu bestimmen, gilt jetzt nur die eine für H, während die zweite zur Bestimmung des neuen Vektors B nötig ist. Keiner der beiden Vektoren ist also bis jetzt vollständig bestimmt, und es ist darum notwendig, noch eine neue Beziehung zwischen ihnen einzuführen. Diese muß aus dem Experiment gefunden werden. Für schwache magnetische Kräfte zeigt sich nun die Magnetisierung proportional der magnetischen Kraft. Darum setzen wir:

$$\mathrm{I} = \varkappa \cdot \mathrm{H}. \tag{13}$$

Diese Gleichung sagt als Vektorgleichung auch aus, daß die Vektoren I und H gleichgerichtet sind. Die Größe $\varkappa$ wird Suszeptibilität genannt, sie ist positiv für ferromagnetische Stoffe (Eisen, Nickel, Kobalt) und für paramagnetische Stoffe (z. B. Sauerstoff, Chrom, Mangan) und negativ für diamagnetische wie Wismut (und in geringem Maße auch Wasser).

Da in unserer Theorie die Vektoren H und B stärker in den Vordergrund treten, ist es für das folgende einfacher, aus Gl. (13) mit Hilfe von Gl. (9) abzuleiten:

$$\mathrm{B} = \mu \cdot \mathrm{H} \tag{14}$$

wo $\mu = 1 + 4\pi f_1 \cdot \varkappa$.

Der Koeffizient μ heißt magnetische Permeabilität und ist nach dem Obenstehenden für para- und ferromagnetische Körper > 1 und für diamagnetische < 1. Sein Zahlenwert unterscheidet sich im allgemeinen nicht sehr stark von 1, nur für Eisen ist er sehr viel größer.

Für anisotrope Stoffe ist die Beziehung etwas komplizierter. Wir können dann schreiben:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{11} H_x + \mu_{12} H_y + \mu_{13} H_z \\ B_y &= \mu_{21} H_x + \mu_{22} H_y + \mu_{23} H_z \\ B_z &= \mu_{31} H_x + \mu_{32} H_y + \mu_{33} H_z \end{aligned} \tag{15}$$

wobei gilt:

$$\mu_{12} = \mu_{21},\ \mu_{13} = \mu_{31},\ \mu_{23} = \mu_{32}.$$

Es läßt sich stets das Koordinatenkreuz so drehen, daß die Gleichungen sich vereinfachen:

$$B_x = \mu_1 H_x,\quad B_y = \mu_2 H_y,\quad B_z = \mu_3 H_z. \tag{15'}$$

Voraussetzung für alle diese Betrachtungen ist eine kleine magnetische Kraft. Ist die Kraft groß, so können Komplikationen eintreten. Es läßt sich dann zu einer bestimmten magnetischen Kraft nicht mehr ohne weiteres eine bestimmte Induktion angeben, die Induktion hängt von der mechanischen Bearbeitung ab, die dem Körper früher zuteil wurde, auch von der magnetischen Kraft, der er vorher unterworfen war und die ihren Einfluß immer noch geltend macht. Diese Erscheinungen lassen sich mit den Nachwirkungen bei festen Körpern vergleichen, die Formveränderungen erlitten haben; man nennt sie: magnetische Hysteresis. Hierzu gehört auch der remanente Magnetismus, der am stärksten an permanenten Stahlmagneten zum Ausdruck kommt. Für alle solche Fälle läßt sich im allgemeinen keine so einfache Gleichung wie Gl. (14) aufstellen. Nur für permanente Magnete kann man in Näherung schreiben I = konstant.

§ 7. Die elektrische Kraft.

Wir gehen jetzt zur Behandlung der zweiten MAXWELLschen Gleichung über, die sich auf die elektrische Kraft bezieht. Den Vektor der elektrischen Kraft wollen wir stets mit dem Buchstaben E bezeichnen. Erfahrungsgemäß wird in einem Punkt eines elektrischen Feldes auf einen kleinen, geladenen Körper eine Kraft ausgeübt, die der Ladung proportional ist. Beschränken wir uns zunächst wieder auf den freien Äther (den wir in großer Näherung auch durch die Luft ersetzen können), so wollen wir die Kraft, die auf einen unendlich kleinen, die Einheitsladung tragenden Körper wirkt, die elektrische Kraft in diesem Punkt nennen. Wir werden jedoch

im folgenden nicht allein von der elektrischen Kraft in einem Punkt des Äthers oder der Luft, sondern auch von der Kraft im Inneren von Körpern, z. B. von einem Metall sprechen. Wir können uns vorstellen, daß sich in dem Körper ein kleiner Hohlraum befindet und wir darin die Kraft messen, die auf einen geladenen Probekörper wirkt. Hierbei werden zwar die gleichen Schwierigkeiten auftreten wie bei der Bestimmung der magnetischen Kraft. Trotzdem wollen wir für den Augenblick annehmen, wir seien ihrer Herr geworden, wir könnten in jedem Punkt eines beliebigen Mediums einen Vektor bestimmen, der der elektrischen Kraft im Äther entspricht. Wir wollen ihn dann stets elektrische Kraft nennen.

Der Zustand des Mediums, der die elektrische Kraft hervorruft, ist auch noch Ursache für eine andere Erscheinung. Finden wir nämlich diesen Zustand in einem Leiter vor, so wirkt die Kraft, die einen geladenen Probekörper forttreibt, auch auf die im Leiter vorhandene Elektrizität. Es entsteht ein Strom, und die Untersuchung der dabei auftretenden Erscheinungen hat gezeigt, daß die Richtung des Stromes in isotropen Körpern mit der der elektrischen Kraft zusammenfällt, und daß die Stromstärke der Größe dieser Kraft proportional ist. Als Gleichung ausgedrückt heißt das:

$$C = \frac{1}{\varrho} E. \tag{16}$$

Den Koeffizienten ϱ, der für einen bestimmten Stoff konstant, aber für verschiedene Stoffe verschieden groß ist, nennen wir den spezifischen Widerstand des Stoffes.

§ 8. Die dielektrische Verschiebung.

Wir haben jetzt den Einfluß der elektrischen Kraft in einem Dielektrikum genauer zu untersuchen. Die Verschiebung der Elektrizität ruft dort eine rücktreibende Kraft hervor (dielektrische Spannung), die, wenn eine bestimmte Elektrizitätsmenge durch den Querschnitt einer Stromröhre geflossen ist, ein Gleichgewicht mit der die Verschiebung verursachenden elektrischen Kraft herstellt. Der Verschiebungsstrom hört dann auf, und der Zustand wird in jedem Punkt durch die gesamte Elektrizitätsmenge bestimmt, die durch ein den Punkt enthaltendes Flächenelement geflossen ist. Um den Strom weiter fließen zu lassen, muß die elektrische Kraft anwachsen. Ein einfaches Beispiel für eine solche Elektrizitäts-

bewegung im Dielektrikum finden wir in dem schon früher behandelten Fall des Ladens eines Leiters. Während der Ladungsstrom fließt, besteht auch ein Verschiebungsstrom im Dielektrikum. Solange dieser Prozeß andauert, wird die Ladung des Leiters und damit auch die elektrische Kraft in jedem Punkt des Dielektrikums größer.

Um nun den Zustand zu irgendeiner Zeit beschreiben zu können, wollen wir für jeden Punkt einen Vektor angeben von folgender Beschaffenheit: seine Komponenten in einer beliebigen Richtung sollen aussagen, wieviel Elektrizität im ganzen durch ein in dem Punkt angebrachtes und senkrecht zu der betreffenden Richtung stehendes Flächenelement geflossen ist und zwar berechnet pro Flächeneinheit. Diesen Vektor bezeichnen wir mit D und nennen ihn dielektrische Verschiebung. Geben wir den Differentialquotienten nach der Zeit durch einen Punkt an, so erhalten wir die Vektorgleichung:

$$\dot{\mathfrak{D}} = \mathfrak{C}. \tag{17}$$

Im stationären Zustand ist $\dot{\mathfrak{D}} = 0$ und $\mathfrak{C} = 0$. Aus der Definition folgt, daß die dielektrische Verschiebung ebenso wie der Strom solenoidal ist. Darum ist: $\int \mathfrak{D}_n \, d\sigma = 0$ für jede geschlossene Fläche, die nur das Dielektrikum umschließt, oder, was dasselbe bedeutet: $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$ und an einer Unstetigkeitsfläche: $(\mathfrak{D}_n)_I = (\mathfrak{D}_n)_{II}$.

Wie hängt die elektrische Kraft mit der dielektrischen Verschiebung zusammen? Die aus Beobachtungen entnommene Antwort auf diese Frage lautet: für isotrope Körper ist

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \cdot \mathfrak{E}. \tag{18}$$

Die Größe ε wird Dielektrizitätskonstante genannt, sie ist eine Materialkonstante. Für anisotrope Körper tritt an Stelle von Gleichung (18)

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \varepsilon_{11}\,\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{12}\,\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{13}\,\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{D}_y &= \varepsilon_{21}\,\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{22}\,\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{23}\,\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{D}_z &= \varepsilon_{31}\,\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{32}\,\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{33}\,\mathfrak{E}_z, \end{aligned} \tag{18'}$$

wobei

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}.$$

Durch passende Wahl der Koordinatenrichtungen kann das System von Gleichungen in die einfachere Form überführt werden:

$$\mathfrak{D}_x = \varepsilon_1 \mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{D}_y = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{D}_z = \varepsilon_3 \mathfrak{E}_z.$$

§ 9. Die zweite MAXWELLsche Gleichung.

Im Gebiet rings um einen kleinen, geladenen Probekörper wird die elektrische Kraft durch das COULOMBsche Gesetz bestimmt und ist bekanntlich ein Potentialvektor. Das Linienintegral über eine beliebige, geschlossene Kurve verschwindet darum,

$$\int \mathrm{E}_s \, ds = 0. \tag{19}$$

Diese Beziehung gilt auch noch in der Umgebung eines Leitungsdrahtes, durch den ein stationärer Strom fließt, und wir wollen jetzt untersuchen, welchen Wert das Linienintegral in anderen Fällen annimmt. Durch Experimente können wir uns stets ein Urteil darüber bilden. Denn denken wir uns längs des angegebenen Weges einen Leitungsdraht gelegt, so muß der Wert des Linienintegrals bestimmend dafür sein, ob in dem Draht ein Strom fließt oder nicht, und wenn ja, welche Richtung und welche Größe er hat. Nehmen wir zunächst an, E_s habe längs des Drahtes überall die gleiche Richtung, die wir als die positive bezeichnen wollen, so muß im Draht ein positiver Strom fließen (s. Gleichung 16), und $\int \mathrm{E}_s \, ds$ muß auch einen positiven Wert besitzen. Kehrt E_s überall die Richtung um, so muß damit sowohl die Stromrichtung als auch das Linienintegral das Vorzeichen wechseln. Ist E_s teils positiv, teils negativ, so können die positiven und die negativen Werte sich gerade aufheben. Dann wird kein Strom entstehen, und auch das Linienintegral wird verschwinden. Überwiegen die positiven Werte von E_s, so entsteht ein Strom in gleicher Richtung wie im ersten Fall und auch das Linienintegral ist positiv, usf. Dies alles läßt sich genauer beschreiben, wenn wir von der Analogie der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einer Röhre Gebrauch machen. Denken wir uns, $\int \mathrm{E}_s \, ds$ sei zeitlich konstant, oder sein Wert könne wenigstens innerhalb der Beobachtungszeit als unveränderlich angesehen werden, so läßt sich die Elektrizitätsströmung mit der stationären Strömung einer Flüssigkeit vergleichen. Wir können die Gleichung aufschreiben, die aussagt, daß die Elektrizität in einem beliebigen Drahtelement keine Beschleunigung erfährt. Ist ω der Drahtquerschnitt, α die Anzahl beweglicher Elektrizitätseinheiten pro Volumeinheit, p eine dem Druck in der Flüssigkeit analoge Kraft und schließlich β ein Koeffizient, der, mit der Geschwindigkeit u multipliziert, den Reibungswiderstand bestimmt, so finden wir

$$\mathrm{E}_s \alpha \omega \, ds - \frac{dp}{ds} \omega \, ds - u \beta \alpha \omega \, ds = 0.$$

Hierbei ist $u \alpha \omega = i$ die Stromstärke, und durch Integration längs des Drahtes erhalten wir

$$\int \mathrm{E}_s d s = i \cdot \int \frac{\beta}{\alpha \cdot \omega} d s .$$

Der Faktor $\int \frac{\beta}{\alpha \cdot \omega} d s$ ist vom Feld unabhängig und allein durch die Eigenschaften des Leitungsdrahtes gegeben. Wir finden also in der Tat, daß der im Draht entstehende Strom dem Linienintegral der elektrischen Kraft proportional ist.

Nun entsteht im Draht stets dann ein Strom, wenn das magnetische Feld in der Umgebung des Drahtes Veränderungen unterliegt. Denken wir uns den Draht im Äther oder in der Luft befindlich, so gilt für die Stromstärke ein berühmtes Gesetz, das als erster FARADAY ausgesprochen hat. Es lautet: Die Stromstärke ist proportional der Änderung, welche die Anzahl der vom Leitungsdraht umschlossenen magnetischen Kraftlinien in der Zeiteinheit erfährt. Diese Anzahl Kraftlinien ist, wie wir gesehen haben, ein anschauliches Bild für das Flächenintregal der magnetischen Kraft, erstreckt über eine Oberfläche, deren Umgrenzung der Leitungsdraht bildet. Dieser Satz gilt auch für andere Medien als den Äther und die Luft, wenn wir an Stelle der magnetischen Kraft die magnetische Induktion setzen. Wählen wir die positive Richtung längs des Drahtes so, daß sie der positiven Richtung der Induktionslinien entspricht, so ist die Stromstärke positiv bei einer Abnahme des Flächenintegrals der magnetischen Induktion.

Da nun sowohl das Linienintegral der elektrischen Kraft als auch die in der Zeiteinheit erfolgende Abnahme des Oberflächenintegrals der magnetischen Induktion mit der Stromstärke proportional sind, so folgt:

$$\int \mathrm{E}_s d s = - k_1 \cdot \frac{d}{d t} \int \mathrm{B}_n d \sigma . \qquad (20)$$

und daraus weiter, daß der Faktor k_1 von der Art des Leitungsdrahtes unabhängig ist und allein durch die Wahl unserer Einheiten bestimmt wird.

Diese Gleichung setzen wir als allgemein gültig voraus. Sie ist die zweite MAXWELLsche Gleichung und gleichwertig dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -k_1 \cdot \frac{\partial B_x}{\partial t} \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -k_1 \cdot \frac{\partial B_y}{\partial t} \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -k_1 \cdot \frac{\partial B_z}{\partial t}
\end{aligned} \tag{21}$$

oder

$$\text{rot}\, \mathfrak{E} = -k_1 \dot{\mathfrak{B}}. \tag{21'}$$

§ 10. Die elektromotorische Kraft.

Ein Problem haben wir bisher nur unvollständig behandelt, das gerade für geschlossene Stromleiter wesentlich werden kann. Ein Strom kann nämlich durch mancherlei andere Ursachen hervorgerufen werden als durch elektrische Kräfte, die oben in den Gleichungen behandelt wurden; er kann z. B. durch chemische Wirkungen entstehen oder durch Temperaturunterschiede u. a. m. Alle Kräfte, die in solchen Fällen auf die Elektrizität wirken, wollen wir unter dem Namen elektromotorische Kräfte zusammenfassen und in jedem Punkt des Leitungsdrahtes, in dem sie bestehen, durch einen Vektor $\mathfrak{E}_e$ ausdrücken. Gleichung (16) muß dann erweitert werden zu

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{\varrho}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e). \tag{22}$$

Die Gleichungen (20) und (21) bleiben unverändert bestehen. Auf die Elektrizitätsbewegung hat die elektromotorische Kraft genau den gleichen Einfluß wie die elektrische Kraft, nur tritt sie allein in Leitern auf, und ihr Ursprung ist ein anderer als der der elektrischen Kraft.

§ 11. Wahl der Einheiten.

In unseren Gleichungen sind noch eine Reihe von Faktoren enthalten, deren Größe von der Wahl der Einheiten abhängt. Diese Einheiten müssen darum zunächst festgelegt werden. Speziell werden uns dabei die folgenden Beziehungen leiten:

1. $$K = f_1 \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{23}$$

hierin ist K die Kraft, die zwei Magnetpole von der Stärke m_1 und m_2 im gegenseitigen Abstand r aufeinander ausüben. Die Gleichung ist das COULOMBsche Gesetz für Magnetpole. Der Faktor f_1 ist der-

selbe, der auch in den Gleichungen auf S. 45, in den Betrachtungen des § 5 und in den Gleichungen (9)—(12) auftrat.

2. Die Gleichungen (8) und (21), von denen wir nur je eine aus dem Gleichungssystem hier aufschreiben:

$$\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{H}_y}{\partial z} = 4\pi k \mathrm{C}_x \tag{8}$$

und

$$\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial z} = -k_1 \frac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial t}. \tag{21}$$

3. Die Gleichungen (17), (18) und (14)

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t} = \mathrm{C}, \quad \mathrm{D} = \varepsilon \mathrm{E}, \quad \mathrm{B} = \mu \mathrm{H}, \qquad \text{und}$$

4. die Gleichungen, die das COULOMBsche Gesetz für sehr kleine, elektrisch geladene Körper ausdrückt

$$K = f_2 \cdot \frac{e\, e_1}{r^2}, \tag{24}$$

in denen e und e_1 die Ladungen der Körper bedeuten, r ihren gegenseitigen Abstand, der groß gegen ihre Dimensionen sein muß, und K die Kraft, die sie aufeinander ausüben.

Diese letzte Gleichung nun läßt sich aus den anderen ableiten. Die Ladung e stellt die gesamte Elektrizitätsmenge dar, die dem Leiter zugeführt ist, und wegen der Inkompressibilität der Elektrizität (wegen des solenoidalen Charakters des elektrischen Stromes) ist sie gleich der Elektrizitätsmenge, die durch den Verschiebungsstrom in das Dielektrikum überführt ist, und zwar durch eine beliebige Oberfläche, die allein den betrachteten elektrischen Körper umschließt. Wir erhalten also:

$$e = \int \mathrm{D}_n \, d\sigma.$$

Wählen wir als Oberfläche eine Kugel, deren Radius groß im Vergleich zu den Dimensionen des geladenen Teilchens ist, und deren Mittelpunkt sich im Teilchen befindet, so finden wir überall an der Oberfläche D_n konstant und die Richtung von D in jedem Punkt der Kugeloberfläche mit der der Normalen, d. h. der Richtung des Radius zusammenfallend. Es ergibt sich also

$$e = 4\pi r^2 \mathrm{D}$$

und damit nach Gleichung (18)

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Die Kraft, die der Körper auf einen zweiten mit der Ladung e_1 im Abstand r ausübt, ist also

$$\frac{e \cdot e_1}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Der Koeffizient in (24) wird somit $f_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$.

Ferner besteht zwischen den Koeffizienten f (S. 44) und k_1 (S. 66) eine Beziehung, die sich aus dem Satz von der Erhaltung der Energie ableiten läßt. Kehren wir deshalb noch einmal zu dem Fall zurück, auf den die zweite Gleichung auf S. 65 sich bezieht. Der erste Term der Gleichung ist die Kraft, die auf die in dem Element ds vorhandene Elektrizitätsmenge wirkt, das Produkt dieses Termes mit der Geschwindigkeit u, also $i\,\mathrm{E}_s\,ds$, ist die Arbeit dieser Kraft in der Zeiteinheit. Integriert man über den ganzen Stromkreis, so erhält man, da i überall den gleichen Wert besitzt,

$$i\int \mathrm{E}_s\,ds,$$

und dies ist die gesamte Arbeit, die die elektrischen Kräfte in der Zeiteinheit im Stromkreis leisten. Dieser Arbeit muß der (in Energieeinheiten ausgedrückten) Wärmeentwicklung gleich sein. Schreibt man nun die erste Gleichung auf S. 66 in der Form

$$\int \mathrm{E}_s\,ds = i\,w$$

(die Größe w ist der „Widerstand" des Kreises) so erhält man

$$i \cdot \int \mathrm{E}_s\,ds = i^2\,w.$$

$i^2\,w$ ist die in der Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge (JOULEsches Gesetz). Sind im Stromkreis auch noch elektromotorische Kräfte vorhanden (S. 67), so hat man zu setzen

$$i\int \mathrm{E}_s\,ds + i\int \mathrm{E}_{e_s}\,ds = i^2\,w,$$

wobei das zweite Glied auf der linken Seite der Gleichung die Arbeit der elektromotorischen Kräfte bedeutet.

Betrachten wir nun den folgenden Versuch: in einem Stromkreis 1 (von endlicher Größe) wirken konstante elektromotorische

Kräfte E_e, die, wenn keine anderen Ursachen für eine Elektrizitätsbewegung vorhanden sind, einen konstanten Strom i hervorbringen. An irgendeine Stelle des durch den Strom erzeugten magnetischen Feldes H bringen wir eine geschlossene, leitende flache Spule 2, die so klein sein möge, daß über ihren ganzen Querschnitt das Feld als homogen angesehen werden darf. Wir wählen in 2 eine positive Richtung für den Strom und passend dazu die Normale n. Die Spule möge um eine senkrecht zu H stehende Achse drehbar sein, der Winkel ϑ zwischen n und H kann also verschiedene Werte annehmen. Durch irgendeinen außen angebrachten Mechanismus lassen wir die Spule eine beliebige periodische Drehbewegung ausführen. Hierdurch werden Ströme (Wechselströme) in 2 induziert, und diese wirken zurück auf 1. Durch passend gewählte elektromotorische Zusatzkräfte $\overline{E}_e$, die wir außer der konstanten Kraft E_e wirken lassen, möge aber die Stromstärke in 1 konstant gehalten werden.

Der Satz von der Erhaltung der Energie sagt nun aus, daß in einem beliebigen Zeitabschnitt die Arbeit der äußeren Kräfte, d. h. die Summe der elektromotorischen und der auf 2 wirkenden mechanischen Kräfte[1]), gleich der Änderung der Energie im System ist. Wir wenden den Satz auf eine volle Periode an. Da am Schluß der Periode der Zustand derselbe ist wie zu Beginn, so brauchen wir die Energie, die, wie sich zeigen wird, im Medium vorhanden ist, nicht zu berücksichtigen. Die Energieänderung des Systems besteht dann allein in der Wärmeentwicklung in 1 und 2. Ist i' der Strom in 2, w der Widerstand in 1, w' der in 2, A die Arbeit der mechanischen Kräfte, die nötig sind, um die Kräfte, mit denen das Feld auf die Spule wirkt, zu überwinden, und schreiben wir F_e und $\overline{F}_e$ zur Abkürzung für die Linienintegrale von E_e und $\overline{E}_e$, so erhalten wir

$$\int i F_e dt + \int i \overline{F}_e dt + A = \int i^2 w dt + \int i'^2 w' dt.$$

Wir beachten, daß außer den obengenannten mechanischen Kräften noch andere wirken müssen, nämlich diejenigen, die nötig sind, um 2 dieselbe Bewegung zu erteilen, wenn keine Ströme fließen.

---

[1]) Solange wir nur einen einzelnen Stromkreis für sich betrachten, müssen wir auch die Arbeit der elektrischen Kraft berücksichtigen. Wenn wir aber das ganze System ins Auge fassen, so brauchen wir das nicht, denn dann ist die elektrische Kraft eine innere Kraft, da die Energie von den Leitern in das umgebende Medium überströmt.

Von diesen Kräften können wir aber absehen, da ihre Arbeit sich in der kinetischen Energie des Spulenmetalls wiederfindet.

Die Kräfte $\bar{E}_e$ müssen die Induktionswirkungen in 1 aufheben. Also muß sein (vgl. Gleichung 20)

$$\bar{F}_e = k_1 \cdot \frac{d\,N}{d\,t},$$

wenn N die Anzahl der durch 1 gehenden, magnetischen Induktionslinien bedeutet. Da N ebenso wie alle anderen veränderlichen Größen sich periodisch ändert, so ist $\int \bar{F}_e\, d\,t$ über eine volle Periode gleich Null. Da i konstant ist, so verschwindet der zweite Term in der Energiegleichung. Die ersten Glieder auf der rechten und der linken Seite der Gleichung haben denselben Wert, den sie auch hätten, falls 2 in Ruhe bliebe, und da sie in diesem Falle die einzigen Glieder wären, so sind sie einander gleich. Daraus folgt

$$A = \int i'^2\, w'\, d\,t,$$

d. h. die Wärmeentwicklung in 2 entspricht der Arbeit der mechanischen Kräfte.

Ist ω die Fläche der Leiterwindung 2, so ist die Zahl der sie schneidenden Kraftlinien

$$\omega\, \mathrm{H} \cos \vartheta$$

und ihre Änderung in der Zeiteinheit

$$-\omega\, \mathrm{H} \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}.$$

Aus dem in (20) ausgedrückten Gesetz folgt aber

$$i'\, w' = k_1\, \omega\, \mathrm{H} \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta},$$

so daß man für die Wärmeentwicklung in 2 schreiben kann

$$k_1\, \omega\, \mathrm{H} \int i' \sin \vartheta\, d\,\vartheta,$$

wobei das Integral über eine volle Periode zu erstrecken ist.

Um die mechanischen Kräfte zu berechnen, wollen wir uns erinnern (§ 3), daß die Spule 2 wie ein Magnet wirkt mit dem Moment

$$f\, \omega\, i'$$

in Richtung von n. Die Erfahrung hat gelehrt, daß sie im Feld auch derselben Wirkung wie ein solcher Magnet unterliegt. Daraus folgt,

daß die äußeren Kräfte, die wir ausüben müssen, in einem Kräftepaar bestehen mit dem Moment

$$f\,\omega\,\mathrm{H}\,i'\sin\vartheta$$

(positiv in Richtung von ϑ), so daß wir für die Arbeit A finden

$$f\,\omega\,\mathrm{H}\int i'\sin\vartheta\,d\,\vartheta.$$

Setzt man die gefundenen Ausdrücke für A und für $\int i'^2\,w'\,d\,t$ einander gleich und bedenkt, daß sie nicht verschwinden können, da, wenn ein Strom i' vorhanden ist, eine positive Wärmeentwicklung auftreten muß, so kommt man zu dem Schluß $f = k_1$, oder in Verbindung mit der Gleichung $f f_1 = k$ von S. 45

$$k_1 \cdot f_1 = k.$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen den in (23), (8) und (21) auftretenden Koeffizienten.

Wir bemerken noch, daß (23) sich auf den Fall bezieht, wo die beiden Magnetpole sich im freien Äther befinden, und daß auch bei den Betrachtungen des § 3 und bei der Ableitung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Koeffizienten angenommen ist, die betrachteten Körper seien nur vom Äther umgeben. Ebenso hatten wir in § 5 vorausgesetzt, daß der in dem magnetischen Körper angebrachte Hohlraum nur mit Äther erfüllt sei.

Unsere Annahme lautet aber, daß die MAXWELLschen Gleichungen (8) und (21) stets mit den gleichen Werten von k_1 und k gültig sind, unabhängig davon, welche Körper oder welches Medium im System vorhanden sind. Die besonderen Eigenschaften der Körper werden dadurch berücksichtigt, daß auf der rechten Seite von Gleichung (21) die magnetische Induktion B auftritt, die in verschiedener Weise von der magnetischen Kraft abhängt, und daß ebenso der Strom C in Gleichung (8) in einer durch die besonderen Umstände gegebenen Art mit der elektrischen Kraft E (und evtl. mit den elektromotorischen Kräften E_e) zusammenhängt. Im Dielektrikum gelten die Gleichungen (17) und (18), im Leiter gilt Gleichung (22). Auch bei Gleichung (24) sollte das elektrisch geladene Teilchen sich im freien Äther befinden. Bei dem Ausdruck, den wir für f_2 fanden, haben wir darum unter ε die Dielektrizitätskonstante des Äthers zu verstehen. Wir schreiben also:

$$f_2 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}.$$

Die Konstante ε_0 nimmt je nach der Wahl der Einheiten verschiedene Werte an. Dagegen hat μ nach der Art, wie wir diese Größe oben eingeführt haben, für den Äther den festen Wert $\mu = 1$. Denn es hat keinen Sinn, den Begriff Magnetisierung für den Äther einzuführen und für $\mathfrak{I} = 0$ wird nach (9) $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$.

A. Die elektromagnetischen Einheiten erhält man, wenn man für f_1 in (23) eine dimensionslose Zahl einführt, und im allgemeinen wählt man die Zahl 1. Wählt man weiter $k = 1$, so wird damit auch $k_1 = 1$; hiermit sind alle Einheiten, in denen die verschiedenen Größen ausgedrückt werden, festgelegt. Zunächst ist es die Einheit der magnetischen Polstärke nach Gleichung (23), dann $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, da diese Vektoren als die Kräfte definiert sind, die auf die nun definierte Einheit der Polstärke wirken, ferner $\mathfrak{C}$ durch die Gleichungen (8) und $\mathfrak{E}$ durch (21). Kennt man in einem Einzelfall den Zahlenwert von $\mathfrak{C}$, d. h. der in der Zeiteinheit strömenden Elektrizitätsmenge, so ist damit auch die Einheit der Elektrizitätsmenge festgelegt. Man kennt dann auch den numerischen Wert von $\mathfrak{D}$, aus (18) folgt damit ε und dadurch ist der Koeffizient f_2 bestimmt. Man kann ihn aus Beobachtungen finden; wir wollen ihn mit c^2 bezeichnen. Aus dem Vorigen läßt sich nun errechnen, daß c die Dimension einer Geschwindigkeit hat, und wir werden später sehen, daß c identisch mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Äther ist.

B) Die elektrostatischen Einheiten erhalten wir, wenn wir zunächst in (24) $f_2 = 1$ setzen. Dadurch wird ee_1 dem Zahlenwert nach c^2 mal größer als oben, die elektrostatische Einheit der Elektrizitätsmenge ist also $1/c$ mal der elektromagnetischen. Die hiermit festgelegte Einheit der Stromstärke ist ebenfalls $1/c$ mal derjenigen im elektromagnetischen System. Die Zahl, die in unseren Gleichungen den Vektor $\mathfrak{C}$ angibt, wird also c mal, diejenige für $\mathfrak{E}$ hingegen $1/c$ mal größer. Wir haben demnach unter $\mathfrak{E}$ eine Kraft zu verstehen, die auf eine c mal kleinere Elektrizitätsmenge wirkt, während $\mathfrak{D}$ c mal größer geworden ist. Wenn im elektromagnetischen Maßsystem für den freien Äther galt $\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \mathfrak{E}$, so wird jetzt

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}.$$

Setzen wir in Gleichung (8) wieder $k = 1$, so wird damit der Zahlenwert von $\mathfrak{H}$ ebenso wie der von $\mathfrak{C}$ c mal größer als in elektro-

magnetischen Einheiten ausgedrückt, d. h. die Einheit der Polstärke ist $c$mal größer geworden. Daraus folgt, daß f_1 in (23) den Wert c^2 erhält. Da schließlich der Zahlenwert von B $c$mal, der von E $\frac{1}{c}$mal größer geworden ist, so muß $k_1 = \frac{1}{c^2}$ gesetzt werden. Wie man sieht, ist damit die Beziehung $k_1 f_1 = k$ wieder erfüllt.

C. Es läßt sich auch die Einheit der Ladung und damit die Einheiten für E, C und D nach elektrostatischem Maßsystem ausdrücken und die Einheit der Polstärke und damit die für H und B nach elektromagnetischem. Die linke Seite von Gleichung (8) bleibt damit in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt, aber C wird (wie unter B) $c$mal größer, so daß sich $k = 1/c$ ergibt. Da $f_1 = 1$ ist, wird $k_1 = 1/c$ und aus $f_2 = 1$ folgt $\varepsilon_0 = 1/4\pi$. Dies ist das Maßsystem von HERTZ.

D. In dem zuletzt angeführten Maßsystem wollen wir noch eine Änderung anbringen, die auf HEAVISIDE zurückgeht. Dadurch fällt der Faktor 4π in Gleichung (8) und im Verhältnis von E zu D fort, und die Gleichungen werden symmetrischer, so daß die Wechselbeziehung zwischen magnetischen und elektrischen Erscheinungen auch in der Form der Gleichungen besser zum Ausdruck kommt. Wir erreichen dies, wenn wir in (23) $f_1 = 1/4\pi$ und in (24) $f_2 = 1/4\pi$ setzen. Die Einheit der Elektrizitätsmenge wählen wir also $1/\sqrt{4\pi}$ mal so groß wie im elektrostatischen, die Einheit der magnetischen Polstärke $1/\sqrt{4\pi}$ mal so groß wie im elektromagnetischen Maßsystem. Dadurch wird $4\pi k = k_1 = 1/c$ und im freien Äther $\mathrm{D} = \mathrm{E}$.

§ 12. Zusammenfassung.

Das System von Gleichungen, mit dem wir im folgenden zu tun haben werden, erhält jetzt folgendes Aussehen:

I. $$\int \mathrm{H}_s \, ds = \frac{1}{c} \int \mathrm{C}_n \, d\sigma,$$

II. $$\int \mathrm{E}_s \, ds = -\frac{1}{c} \int \dot{\mathrm{B}}_n \, d\sigma.$$

Die Bedeutung der Integrale ist aus dem Vorangehenden genügend bekannt.

III. $\mathrm{B} = \mu \mathrm{H}$

VI. $\mathrm{C} = \dot{\mathrm{D}}$ im Dielektrikum

$$\text{V.} \qquad \begin{cases} \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} & \text{im Dielektrikum} \\ \mathfrak{C} = \dfrac{1}{\varrho}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e) & \text{in Leitern.} \end{cases}$$

Die Gleichungen III und V müssen für anisotrope Körper durch andere, etwas kompliziertere, ersetzt werden (s. S. 62 und 64) und sind im übrigen als empirische Beziehungen aufzufassen, die nur für einfache Fälle gültig sind. Für den freien Äther ist $\mu = 1$ und $\varepsilon = 1$.

Die Gleichungen I und II sind gleichwertig mit den folgenden Systemen von Differentialgleichungen:

$$\text{I'} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} &= \frac{1}{c}\mathfrak{C}_x \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} &= \frac{1}{c}\mathfrak{C}_y \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} &= \frac{1}{c}\mathfrak{C}_z \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathfrak{C}$$

also $$\operatorname{div}\mathfrak{C} = 0$$

und

$$\text{II'.} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}_x \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}_y \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}_z \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}$$

also $$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

wobei die folgenden Bedingungen für Unstetigkeitsflächen zugefügt werden müssen:

$$(\mathfrak{C}_n)_I = (\mathfrak{C}_n)_{II} \qquad (\mathfrak{B}_n)_I = (\mathfrak{B}_n)_{II}$$
$$(\mathfrak{H}_s)_I = (\mathfrak{H}_s)_{II} \qquad (\mathfrak{E}_s)_I = (\mathfrak{E}_s)_{II}.$$

Von diesen vier Gleichungen drücken die zwei oberen die Stetigkeit der Normalkomponenten des Stromes und der magnetischen Induktion aus, als unmittelbare Folge des solenoidalen Charakters dieser Vektoren. Die zwei anderen sagen aus, daß die Tangentialkomponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft stetig sind, denn s ist eine willkürliche Richtung in der Unstetigkeitsfläche. Die Gleichungen lassen sich aus I und II ableiten. Es sei $A\,B$ eine

beliebige Kurve in der Oberfläche, und eine unendlich kleine Strecke $A_1 A_2$, senkrecht zur Oberfläche stehend, möge mit einem ihrer Punkte, z. B. mit ihrem Mittelpunkt, längs $A B$ wandern. σ sei die Fläche, die diese kleine Strecke überstreicht, und wir betrachten den Grenzübergang für den Fall, daß $A_1 A_2$ gegen Null konvergiert. Wenn die elektromagnetischen Größen an der Unstetigkeitsfläche endlich bleiben, so verschwinden sowohl in I als auch in II die rechten Seiten der Gleichungen. Ebenso werden die Beiträge von $A_1 A_2$ und $A_2 A_1$ zum Linienintegral auf den linken Seiten von I und II unendlich klein. Daraus folgt, daß das Linienintegral der Vektoren H und E gleich groß sein muß für die Strecke, die A_1 und diejenige, die A_2 überstreicht, und damit ist die Stetigkeit von H_s und E_s bewiesen.

Zu einem anderen Resultat gelangt man, falls nicht alle elektromagnetischen Größen endlich bleiben. In einem dünnen Metallblatt möge ein endlicher Strom fließen, und wir wollen uns als mathematische Fiktion vorstellen, daß die Stromstärke konstant bleibt, während die Dicke des Blattes gegen Null konvergiert („Oberflächenstrom"). Hierbei wird C unendlich groß. Man kann sich dann leicht überlegen, welcher Unterschied in diesem Fall zwischen den Werten von H_s an den beiden Seiten der Oberfläche besteht.

Nachdem wir die Einheiten gewählt haben, an denen wir im folgenden auch festhalten werden, möchten wir zum Schlusse noch auf etwas hinweisen. Für unser System von Einheiten ist die Kraft zwischen zwei (im Äther befindlichen) Magnetpolen gegeben durch den Ausdruck $m\, m_1/4\, \pi\, r^2$, die Kraft zwischen zwei kleinen, elektrisch geladenen Körpern ist $e\, e_1/4\, \pi\, r^2$ und eine Schleife, die die Oberfläche ω umfaßt und in der ein Strom von der Stärke i fließt, ist äquivalent einem Magneten mit dem Moment $i\, \omega/c$.

Zweites Kapitel.

Elektrostatik.

§ 1. Die Problemstellung in der Elektrostatik.

In der Elektrostatik betrachten wir den elektrischen Zustand in einem Feld, in dem sich beliebige Leiter und Dielektrika befinden, wobei aber vorausgesetzt wird, daß nirgends ein Strom fließt ($\mathfrak{C} = 0$) und überall die magnetische Induktion konstant ist. Ein konstantes magnetisches Feld, wie z. B. das erdmagnetische, kann wohl auftreten, doch wird sich zeigen, daß es bei den Betrachtungen in diesem Kapitel ohne Bedeutung ist. Durch diese letztere Voraussetzung nimmt die zweite Maxwellsche Gleichung die Form an:

$$\text{rot } \mathfrak{E} = 0 .$$

Es besteht also ein elektrisches Potential Φ, so daß

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi$$

ist, und diese Größe Φ spielt in der Elektrostatik, vor allem bei ihrer mathematischen Behandlung, eine wesentliche Rolle. Die Eigenschaften dieses Potentials wollen wir darum zunächst untersuchen. Es ist überall stetig. Innerhalb von Leitern muß $\mathfrak{E}$ der Bedingung genügen $\mathfrak{C} = \mathfrak{E}/\varrho$, (wir wollen annehmen, daß keine elektromotorischen Kräfte wirksam sind), und damit wird $\mathfrak{E} = 0$. Das Potential innerhalb eines jeden Leiters ist also konstant und hat auch für jeden Punkt der Oberfläche den gleichen Wert, mit anderen Worten, die Oberfläche eines jeden Leiters ist eine Äquipotentialfläche, die elektrische Kraft steht darum überall senkrecht auf der Leiteroberfläche.

Haben wir es mit einem isotropen Dielektrikum zu tun, so gilt die Beziehung $\mathfrak{D} = \varepsilon \cdot \mathfrak{E}$, also hat $\mathfrak{D}$ überall die gleiche Richtung wie $\mathfrak{E}$. Über die Oberfläche eines Leiters erstreckt, stellt, wie wir gesehen haben, $\int \mathfrak{D}_n \, d\sigma$ die gesamte Ladung dar. Daß auch in jedem Ober-

flächenpunkt die Ladungsdichte durch D_n bestimmt ist, läßt sich leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß für jede geschlossene Fläche $\int D_n \, d\sigma$ gleich der innerhalb der Fläche befindlichen Ladung ist. Man wende diesen Satz auf einen kleinen Zylinder an, der senkrecht zur Leiteroberfläche steht, ein kleines Flächenelement aus ihm ausschneidet und oben und unten zwei Endflächen besitzt, die parallel der Oberfläche und in unmittelbarer Nähe zu ihren beiden Seiten liegen.

Wir erinnern daran, daß das Potential nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Wir wählen diese nun so, daß das Potential in unendlich großem Abstand — an den Wänden unseres Beobachtungsraumes — gleich Null wird.

Die erste Aufgabe der Elektrostatik ist jetzt, den Zustand zu bestimmen, wenn der Wert des Potentials auf jedem Leiter gegeben ist. Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir das Potential in jedem Punkt des Raumes angeben können. Im Dielektrikum gilt überall

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$$

also gilt, falls das Dielektrikum isotrop ist,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0 \tag{1}$$

Sind die Dielektrika homogen und stoßen sie an den Grenzflächen unstetig aneinander, so folgt für jeden Punkt innerhalb eines jeden Dielektrikums

$$\Delta \Phi = 0 \,, \tag{2}$$

während an der Grenzfläche Φ stetig ist (da Φ_P gleich dem Linienintegral über $\mathfrak{E}$ von P bis zu einem gegebenen Punkt ist), und (wegen der Stetigkeit von D_n) gilt:

$$\varepsilon_I \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_I = \varepsilon_{II} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{II} .$$

Durch diese Gleichungen, durch die fest vorgegebenen Bedingungen an der Oberfläche der Leiter und in unendlich großem Abstand ist, wie wir wissen, auch Φ eindeutig bestimmt (s. S. 31).

Betrachten wir jetzt den Fall eines einzelnen Leiters. Ist eine Lösung für Φ gefunden, so werden wegen des linearen Charakters der Gleichungen auch noch alle Bedingungen erfüllt sein, wenn wir überall das Potential (und ebenso die gegebenen Potentiale) A mal

größer machen. Damit wird E und auch D und damit auch die Ladung A mal so groß. Nennen wir die Ladung, die ein Leiter trägt, wenn sein Potential 1 ist, C, so folgt aus dem Obenstehenden sofort die Ladung, die er trägt, wenn sein Potential einen beliebigen Wert Φ besitzt; sie ist $C \cdot \Phi$. Die Größe C heißt die Kapazität des Leiters.

Was wir hier für einen einzelnen Leiter ableiten konnten, indem wir berücksichtigten, daß Φ durch lineare Gleichungen bestimmt ist, ist nur der besondere Fall eines viel allgemeineren Satzes. Genügen nämlich innerhalb eines gegebenen Raumes zwei Punktfunktionen Φ_1 und Φ_2 einem System von linearen Gleichungen, so werden im selben Raume die Gleichungen auch durch $A\,\Phi_1 + B\,\Phi_2$ erfüllt (Superpositionsgesetz). Nur wenn Leiter im Raum vorhanden sind, so muß der vorgegebene Wert von Φ an den Leiteroberflächen entsprechend modifiziert werden.

Wir werden nun einzelne Beispiele anführen und dabei zunächst zur Vereinfachung annehmen, daß wir es mit einem einzigen, homogenen Dielektrikum, z. B. mit Luft, zu tun haben. Auch dann noch werden wir die sich ergebenden Fragen nur für einzelne einfache Sonderfälle lösen können. Im allgemeinen werden wir dabei folgendermaßen vorgehen: von den zahlreichen möglichen Lösungen der Laplaceschen Gleichung suchen wir eine aus (die wir z. B. durch eine anfängliche passende Transformation der Gleichungen finden) und bringen diese dann (etwa durch passende Wahl der Konstanten) in die Form, die den gegebenen Randbedingungen an der Oberfläche genügt.

§ 2. Beispiele.

Betrachten wir zunächst einen einzelnen, kugelförmigen Leiter vom Radius a. Relativ zum Kugelmittelpunkt herrscht vollkommene Symmetrie, alle Größen sind auf konzentrischen Kugelflächen konstant. So ist auch Φ allein eine Funktion von r, dem Abstand vom Mittelpunkt. Wenn wir darum r als Variable einführen, so nimmt die Laplacesche Gleichung die Form an:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} = 0$$

oder, nach Multiplikation mit r^2

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0;$$

hieraus folgt

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{C}{r^2},$$

$$\Phi = -\frac{C}{r} + C_1.$$

Die Konstanten müssen so bestimmt werden, daß erstens $\Phi = 0$ für unendlich großen Abstand wird, d. h. $C_1 = 0$, ferner muß an der Kugeloberfläche für $r = a$ gelten

$$\Phi = \Phi_1 = -\frac{C}{a}, \text{ also } C = -a\Phi_1.$$

Wir erhalten jetzt als Lösung

$$\Phi = \frac{a}{r}\Phi_1.$$

Die Kraftlinien verlaufen radial, also ist

$$\varepsilon \mathrm{E} = \mathrm{D} = \varepsilon \frac{a}{r^2}\Phi_1$$

für die Ladung gilt:

$$e = \int \frac{\varepsilon a}{r^2}\Phi_1 \, d\sigma = 4\pi\varepsilon a \Phi_1.$$

Die Kapazität beträgt also: $C = 4\pi\varepsilon a$. Besteht das Dielektrikum aus dem Äther (oder aus Luft), so wird $C = 4\pi a$ ($C = a$ in elektrostatischen Einheiten, $C = \frac{a}{c^2}$ in elektromagnetischen Einheiten).

Die Dielektrizitätskonstante eines einzelnen Mediums hängt zwar von der Wahl der Einheiten ab, jedoch nicht das Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten zweier Medien, wie ohne weiteres verständlich ist. Das Verhältnis der Dielektrizitätskonstante eines Stoffes zu der des Äthers wird spezifische Induktion genannt. Da bei unserer Wahl der Einheiten für den Äther $\varepsilon = 1$ ist, so wird für andere Medien die spezifische Induktion durch die gleiche Zahl wie die Dielektrizitätskonstante ausgedrückt. Stets läßt sich sagen: die Kapazität eines kugelförmigen Leiters, der sich in einem isotropen, homogenen Medium befindet, ist proportional der spezifischen Induktion des Mediums. Dieser Satz gilt auch für nicht kugelförmige Leiter.

In der gleichen Art läßt sich das Feld zwischen zwei konzentrischen Kugeln mit den Radien a_1 und a_2 bestimmen. ($a_1 > a_2$, sphärischer Kondensator.) Auch hier genügt Φ der Gleichung

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) = 0$$

also ist:

$$\Phi = -\frac{C}{r} + C_1 .$$

Der Wert der Konstanten muß jetzt aus der Bedingung abgeleitet werden, daß auf beiden Kugeln das Potential einen vorgegebenen Wert hat, es muß sein: $\Phi = \Phi_1$ für $r = a_1$ und $\Phi = \Phi_2$ für $r = a_2$.

$$\Phi_1 = -\frac{C}{a_1} + C_1$$

$$\Phi_2 = -\frac{C}{a_2} + C_1$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = C\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}; \qquad a_1 \Phi_1 - a_2 \Phi_2 = C_1 (a_1 - a_2),$$

also

$$\Phi = -\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r} + \frac{a_1 \Phi_1 - a_2 \Phi_2}{a_1 - a_2}.$$

Die elektrische Kraft und die dielektrische Verschiebung sind radial gerichtet, ihr Wert (positiv nach außen) ist gegeben durch die Ausdrücke

$$E = -\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r^2},$$

$$D = -\varepsilon\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r^2}.$$

Die Ladung der inneren Kugel beträgt

$$e = -\int \varepsilon \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{a_2^2}\, d\sigma = -4\pi\varepsilon\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Die Ladung der äußeren Kugel ist gleich groß und trägt das entgegengesetzte Vorzeichen.

Der Wert, den diese Ladung annimmt, wenn $\Phi_1 - \Phi_2 = 1$ ist, heißt die Kapazität des Kondensators.

Diese wird also um so größer, je kleiner $a_1 - a_2$ ist. Nennen wir die Kapazität C, so ist

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}$$

und wenn der Raum zwischen den Kugeln mit Luft ausgefüllt ist,

$$C = 4\pi \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2},$$

(im elektrostatischen Maßsystem $C = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}$, im elektromagnetischen $C = \frac{1}{c^2} \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}$).

Noch einfacher ist der Fall zweier paralleler, leitender Platten. Wählen wir die x-Achse senkrecht zu den Platten, so kann Φ allein von x abhängen. Es wird dann

$$\Delta \Phi = \frac{d^2 \Phi}{d x^2} = 0$$

und damit $\Phi = C x + C_1$.

Ist nun an der einen Fläche $x = 0$ und das vorgegebene Potential Φ_2 und an der anderen $x = d$ und das Potential Φ_1, so wird

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= C d + C_1 \\ \Phi_2 &= \quad\quad C_1, \end{aligned}$$

somit

$$\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d} x + \Phi_2.$$

Diese Gleichung gilt streng aber nur, wenn beide Flächen unendlich groß sind. Sind zwei gleich große, leitende Platten einander parallel aufgestellt in einem Abstand, der klein verglichen mit ihren Abmessungen ist (Platten-Kondensator), so gilt die Gleichung für einen großen Teil des Feldes zwischen den Platten. Nahe am Rande sind jedoch die Kraftlinien etwas nach außen gebogen, ferner können auch Kraftlinien von der Rückseite der Platten ausgehen. Durch einen Kunstgriff (der z. B. bei dem absoluten Elektrometer von THOMSON angewandt wird) läßt sich erreichen, daß trotzdem für die ganze in Betracht kommende Oberfläche die obige Beziehung gültig bleibt. Dieser Kunstgriff besteht darin, die Fläche aus einer größeren auszuschneiden oder, anders ausgedrückt, die betrachtete

Platte mit einem Schutzring zu umgeben, der auf dem gleichen Potential wie die Kondensatorplatte gehalten wird.

Ist nun die Oberfläche des betrachteten Kondensators S, so läßt sich wieder leicht die Ladung und die Kapazität angeben.

Wir erhalten

$$E = -\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d} \qquad D = -\varepsilon\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d}$$

und für die Ladung der Platte mit dem Potential Φ_2

$$e = S\,\varepsilon\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{d}$$

Für die Kapazität des Kondensators ergibt sich

$$C = \frac{S\,\varepsilon}{d},$$

wobei ε die spezifische Induktion angibt. (In elektrostatischem Maß gemessen ist $C = \frac{S\,\varepsilon}{4\pi d}$, in elektromagnetischem $C = \frac{S\,\varepsilon}{4\pi c^2 d}$.)

Befindet sich zwischen den Platten Luft, so läßt sich wieder $\varepsilon = 1$ setzen. In ganz analoger Weise wird die Rechnung für zwei koaxiale Zylinder (Zylinderkondensator) durchgeführt.

Wir sehen also, daß für Probleme dieser Art folgender Satz von großer Wichtigkeit ist: das Feld ist eindeutig bestimmt durch die vorgegebenen Werte von Φ an der Oberfläche der Leiter, durch die Randbedingung in unendlich großer Entfernung, durch die Forderung der Stetigkeit von Φ und seinen ersten Ableitungen im ganzen Feld, ferner durch die Stetigkeit von Φ an der Oberfläche der Leiter und schließlich durch die Bedingung, daß Φ außerhalb der Leiter der LAPLACEschen Gleichung genügen muß. Haben wir also eine Lösung gefunden, die alle diese Bedingungen erfüllt, so heißt das, diese Lösung muß auch die einzig mögliche sein. Oft kann man sich, um sie aufzufinden, durch Ausprobieren helfen. Um das zu zeigen, werden wir noch das Feld um einen Ellipsoid-Kondensator berechnen, dessen äußere Oberfläche durch die Gleichung gegeben ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ wo } a > b > c \tag{3}$$

und der auf einem Potential Φ_1 gehalten wird.

Betrachten wir ein System konfokaler Flächen, die durch die Gleichung bestimmt sind:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1.$$

Der Ausdruck stellt Ellipsoide dar für $\lambda > -c^2$, einschalige Hyperboloide für $-c^2 > \lambda > -b^2$ und zweischalige Hyperboloide für $-b^2 > \lambda > -a^2$. Durch jeden Punkt x_1, y_1, z_1 des Raumes gehen drei dieser Flächen, je eine von jeder Sorte. Die drei zugehörigen Werte von λ lassen sich aus der Gleichung dritten Grades bestimmen:

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda}+\frac{z_1^2}{c^2+\lambda}=1. \tag{4}$$

Die Gleichung hat eine Wurzel zwischen $-a^2$ und $-b^2$, die wir λ_1 nennen wollen, eine zweite, λ_2, zwischen $-b^2$ und $-c^2$ und eine dritte, λ_3, die größer als $-c^2$ ist. Durch diese drei Größen ist natürlich auch der Punkt x_1, y_1, z_1 bestimmt, und wir können die drei Wurzeln als Koordinaten des Punktes einführen (elliptische Koordinaten). Die Cartesischen Koordinaten erhält man dann aus dem System von Gleichungen, das entsteht, wenn man in (4) nacheinander λ durch λ_1, λ_2 und λ_3 ersetzt. Wir erhalten:

$$x_1^2\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2+\lambda_1} & \frac{1}{b^2+\lambda_1} & \frac{1}{c^2+\lambda_1} \\ \frac{1}{a^2+\lambda_2} & \frac{1}{b^2+\lambda_2} & \frac{1}{c^2+\lambda_2} \\ \frac{1}{a^2+\lambda_3} & \frac{1}{b^2+\lambda_3} & \frac{1}{c^2+\lambda_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b^2+\lambda_1} & \frac{1}{c^2+\lambda_1} \\ 1 & \frac{1}{b^2+\lambda_2} & \frac{1}{c^2+\lambda_2} \\ 1 & \frac{1}{b^2+\lambda_3} & \frac{1}{c^2+\lambda_3} \end{vmatrix}, \text{ usf.}$$

Zieht man in der linken Determinante die erste Kolonne von der zweiten und dritten ab, so kann man die Faktoren (a^2-b^2), (a^2-c^2), $1/(a^2+\lambda_1)$, $1/(a^2+\lambda_2)$, $1/(a^2+\lambda_2)$ ausklammern, und der Rest ist gerade die Determinante auf der rechten Seite. Also

$$\begin{aligned} x_1^2\,(a^2-b^2)\,(a^2-c^2) &= (a^2+\lambda_1)\,(a^2+\lambda_2)\,(a^2+\lambda_3) \\ y_1^2\,(b^2-c^2)\,(b^2-a^2) &= (b^2+\lambda_1)\,(b^2+\lambda_2)\,(b^2+\lambda_3) \\ z_1^2\,(c^2-a^2)\,(c^2-b^2) &= (c^2+\lambda_1)\,(c^2+\lambda_2)\,(c^2+\lambda_3). \end{aligned} \tag{5}$$

Nach dem Obenstehenden ist klar, daß sich zwei Ellipsoide des Systems niemals schneiden, ebensowenig wie zwei zweischalige oder

zwei einschalige Hyperboloide. Hingegen schneiden sich zwei ungleichnamige Flächen stets, und zwar orthogonal. Diese letztere Behauptung läßt sich folgendermaßen beweisen: wenn

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{z_1^2}{c^2+\lambda_1}=1$$

und

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{z_1^2}{c^2+\lambda_2}=1$$

ist, so erhält man durch Subtraktion und Division mit $\lambda_2-\lambda_1$ $(\neq 0)$

$$\frac{x_1^2}{(a^2+\lambda_1)\,(a^2+\lambda_2)}+\frac{y_1^2}{(b^2+\lambda_1)\,(b^2+\lambda_2)}+\frac{z_1^2}{(c^2+\lambda_1)\,(c^2+\lambda_2)}=0.$$

Diese Beziehung drückt aus, daß die Tangentialflächen, die im Punkt x_1, y_1, z_1 an die beiden durch λ_1 und λ_2 gegebenen Flächen gelegt werden können, senkrecht aufeinander stehen. Denn der Richtungscosinus der Normalen einer durch λ bestimmten Fläche ist proportional mit $x_1/(a^2+\lambda)$, $y_1/(b^2+\lambda)$ und $z_1/(c^2+\lambda)$.

Wir wollen nun für das Potential Φ eine Funktion suchen, die auf jeder der konfokalen Ellipsoide konstant ist, also allein von λ_3 abhängt: $\Phi=f(\lambda_3)$. Wir werden zu diesem Zwecke die Laplacesche Gleichung auf elliptische Koordinaten transformieren und dabei einführen, daß Φ allein von λ_3 abhängt. Die neue Form der Gleichung wird uns leichter anschaulich werden, wenn wir bedenken, daß die Gleichung den solenoidalen Charakter der dielektrischen Verschiebung ausdrückt. Die betrachteten Systeme von Hyperboloiden stehen überall senkrecht auf unseren Äquipotentialflächen, sie sind also elektrische Kraftlinien, und mit ihnen fallen die dielektrischen Verschiebungslinien zusammen. Wir wollen eine Verschiebungsröhre näher betrachten. Eine solche sei eingeschlossen durch ein Paar von Hyperboloiden, die durch λ_1 und $\lambda_1+d\lambda_1$ charakterisiert sind, und ein zweites Paar mit λ_2 und $\lambda_2+d\lambda_2$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für den solenoidalen Charakter ist nun, daß in jedem Punkt der Röhre die dielektrische Verschiebung umgekehrt proportional dem Röhrenquerschnitt ist, der in dem Punkt senkrecht zur Röhre gelegt ist. Diese geraden Querschnitte sind kleine Rechtecke, die auf unseren Äquipotentialflächen liegen. Betrachten wir nun ein Röhrenelement, gelegen zwischen den Ellipsoiden λ_3 und $\lambda_3+d\lambda_3$, und nennen wir ds_1 und ds_2 die Seiten des Rechtecks auf dem ersten

Ellipsoid und ds_3 den Abstand der beiden Röhrenquerschnitte, dann ist

$$ds_1^2 = \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2\right\} d\lambda_1^2,$$

ferner nach (5)

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \frac{x}{2(a^2+\lambda_1)}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = \frac{y}{2(b^2+\lambda_1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = \frac{z}{2(c^2+\lambda_1)}.$$

Also wird

$$ds_1^2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)^2}\right\} d\lambda_1^2.$$

Um den Ausdruck in der geschweiften Klammer auszuwerten, gehen wir von einer Identität aus: der nachfolgende Ausdruck dritten Grades in λ

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\left\{\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1\right\}$$

wird 0 für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Da der Koeffizient von λ^3 gleich -1 ist, so wird also

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = \frac{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$

und nach logarithmischer Differentiation nach λ

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2}{(c^2+\lambda)^2} = \frac{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} \times \left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda} + \frac{1}{\lambda_3-\lambda} + \frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right).$$

Setzen wir hierin $\lambda = \lambda_1$, so wird:

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)^2} = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}.$$

Also

$$ds_1^2 = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{4(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)} d\lambda_1^2.$$

Analog ist:

$$ds_2^2 = \frac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}{4(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)} d\lambda_2^2$$

und

$$d s_3^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{4(a^2 + \lambda_3)(b^2 + \lambda_3)(c^2 + \lambda_3)} d\lambda_3^2.$$

Nun beträgt die gesamte Veränderung von Φ beim Übergang von einem Querschnitt zum anderen $d\Phi/d\lambda_3 \cdot d\lambda_3$, also die Änderung pro Längeneinheit $d\Phi/d\lambda_3 \cdot d\lambda_3/ds_3$, und dieser Ausdruck mit umgekehrtem Vorzeichen gibt die elektrische Kraft und die dielektrische Verschiebung an. Unsere Bedingung lautet also

$$\frac{d\Phi}{d\lambda_3}\frac{d\lambda_3}{ds_3} ds_1 ds_2 = \text{constant}.$$

Führen wir in diesen Ausdruck die oben gefundenen Werte für ds_1, ds_2 und ds_3 ein, so erhalten wir eine Beziehung, in welcher eine Anzahl Faktoren von selbst überall in der Röhre konstant sind. Wir haben allein auf die übrigen, nämlich auf diejenigen, die λ_3 enthalten, zu achten und erhalten

$$\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_3}\right)^2 (a^2 + \lambda_3)(b^2 + \lambda_3)(c^2 + \lambda_3) = C. \tag{6}$$

Diese Form nimmt in unserem Fall die LAPLACEsche Gleichung an. Die Größe C ist nicht allein für eine bestimmte Verschiebungsröhre konstant, sondern ist es im ganzen Feld, da die linke Seite der Gleichung von λ_1 und λ_2 unabhängig ist.

Wir können jetzt das Potential mit Hilfe eines elliptischen Integrals ausdrücken. Die Integrationskonstante bestimmen wir durch die Bedingung, daß im Unendlichen $\Phi = 0$ ist. Wir erhalten dann:

$$\Phi = C \cdot \int_{\infty}^{\lambda_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \tag{7}$$

Die Konstante C ist so zu wählen, daß Φ für $\lambda_3 = 0$ den vorgegebenen Wert $\Phi = \Phi_1$ hat.

Hiermit ist der Zustand des Feldes vollständig gegeben. Wir betrachten noch die Ladungsdichte an verschiedenen Punkten der Leiteroberfläche. Diese ist, wie wir gesehen haben, durch den Wert von D, also durch $-d\Phi/dn$ bestimmt. Legen wir um unser Ellipsoid ein konfokales Ellipsoid in geringem Abstand, so ist

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \lim \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\delta},$$

wenn Φ_2 das Potential der neuen Fläche und δ den Abstand der Flächen voneinander bedeutet. Hieraus folgt, daß die Dichte an den einzelnen Punkten umgekehrt proportional der Schichtdicke zwischen den beiden Ellipsoiden ist. Auf diese Weise ist der Vergleich der Ladungsdichten in zwei Punkten auf ein geometrisches Problem zurückgeführt. Sehr einfach ist die Frage für die Kuppen zu lösen. Bezeichnen wir die Dichten an den Endpunkten der Achsen a und b mit σ_a und σ_b, so folgt:

$$\sigma_a : \sigma_b = \delta b : \delta a$$

und da bei konfokalen Ellipsoiden $b^2 - a^2 =$ constant ist, so ist $b\,\delta b = a\,\delta a$ und somit

$$\sigma_a : \sigma_b = a : b.$$

Die Dichte ist also an den Enden der großen Achse am größten, wie auch allgemein bekannt ist.

Denken wir uns eine der Äquipotentialflächen leitend gemacht und auf dasjenige Potential aufgeladen, das am Orte der Fläche vorher herrschte, so bleibt das Feld außerhalb das gleiche, denn, ohne daß etwas geändert wird, bleiben alle vorgegebenen Bedingungen erfüllt, und dadurch ist das Feld eindeutig bestimmt. Die Reihe konfokaler Ellipsoide läßt sich auch nach innen fortsetzen, und dadurch gelangt man schließlich zu einer elliptischen Scheibe. Wenn wir von einem Rotationsellipsoid ausgehen, dessen Rotationsachse mit der großen Achse zusammenfällt, so artet die Scheibe in eine Gerade aus, ist die kurze Achse Rotationsachse, so erhalten wir einen Kreis. Bei dieser Art von Grenzübergang läßt sich also das Feld berechnen, das eine elliptische oder eine kreisförmige, geladene Scheibe oder ein geladener Stab im Dielektrikum hervorrufen. (Hierbei werden diese Sonderfälle wirklich als Grenzfälle von Ellipsoiden aufgefaßt.) Man sieht also, daß man Äquipotentialflächen für bestimmte Leiterformen berechnen kann, wenn man sie für andere Formen bereits kennt.

§ 3. Die Theorie der elektrischen Bilder.

Dieser zuletzt erwähnten Methode kommt eine allgemeine Bedeutung zu, und wir wollen sie jetzt systematisch bei der Theorie der elektrischen Bilder anwenden. Wir werden dabei öfters von einem elektrisch geladenen Punkt sprechen und gelangen zu diesem Begriff durch einen Grenzübergang. Denken wir uns eine sehr kleine,

geladene Kugel, und lassen wir ihren Radius, ohne die Ladung zu verändern, unbegrenzt abnehmen. Das Potential, das solch ein geladener Punkt mit der Ladung e im Abstande r hervorruft, ist

$$\Phi = \frac{e}{4\pi r}.$$

Zwei geladene Punkte verursachen ein Feld, das sich aus der Superposition der beiden Einzelfelder berechnen läßt. Für das Potential in einem beliebigen Punkte erhalten wir also

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{r} + \frac{e'}{r'}\right).$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist ohne weiteres verständlich. Diese Funktion genügt der Laplaceschen Gleichung, sie erfüllt ferner die Randbedingung im Unendlichen; wir erhalten weiter: $-\int \frac{d\Phi}{dr}\, d\sigma = e$, wenn wir das Integral über eine Kugel erstrecken, die den ersten Punkt einschließt, den zweiten ausschließt, und $-\int \frac{d\Phi}{dr'}\, d\sigma' = e'$, wenn umgekehrt der erste Punkt aus- der zweite eingeschlossen wird. (Diese einfache Funktion gibt aber keine Lösung für zwei Leiter von endlichen Dimensionen, da Φ an der Oberfläche jedes einzelnen Leiters nicht konstant sein wird.) Die Gleichung der Äquipotentialflächen wird

$$\frac{e}{r} + \frac{e'}{r'} = C. \tag{8}$$

Allgemein stellt die Gleichung Flächen achten Grades dar, nur für $C = 0$ ergibt sich eine Kugel, falls außerdem noch e und e' entgegengesetztes Vorzeichen haben. Denken wir uns nun einen Leiter, dessen Oberfläche diese Kugelfläche bildet, und verbinden ihn mit der Erde, so daß sein Potential überall gleich Null ist, so ist der Feldzustand außerhalb der Kugel ungeändert, da noch allen Grenzbedingungen genügt wird.

Ist nun ein Punkt P mit der Ladung e gegeben und der kugelförmige, zur Erde abgeleitete Leiter M, so muß das Feld im Dielektrikum außerhalb der Kugel dasselbe sein wie dasjenige, das entsteht, wenn wir nach Entfernung der Kugel im Punkt Q die Ladung e' anbringen. Der Punkt Q muß dabei so gelegen sein, daß für alle Punkte der Kugel das Abstandsverhältnis nach P und Q gleich

groß ist, er ist also Schnittpunkt der zu P gehörigen Polfläche mit PM (Fig. 9). Ist a der Radius der Kugel, $MP = l$ und $MQ = l'$, so ist $a^2 = ll'$ oder $a/l = l'/a$. Für die Ladung e' des Punktes Q finden wir somit

$$\frac{e'}{QR} + \frac{e}{PR} = 0,$$

$$\frac{-e'}{e} = \frac{a-l'}{l-a} = \frac{a}{l} = \frac{l'}{a}. \tag{9}$$

Der Punkt Q mit der Ladung $-ea/l$ wird das elektrische Bild von P in bezug auf die Kugel M genannt. Dieser Name wurde in Analogie zur Theorie des Lichtes gewählt. Wird ein leuchtender Punkt P in die Nähe eines kugelförmigen oder eines ebenen Spiegels gebracht, so sind die Erscheinungen so, als ob außer P noch ein zweiter leuchtender Punkt Q vorhanden wäre, das leuchtende Bild von P. Ebenso treten hier die Erscheinungen so auf, als ob außer dem elektrisch geladenen Punkt P noch ein zweiter geladener Punkt Q vorhanden wäre, nämlich das elektrische Bild von P.

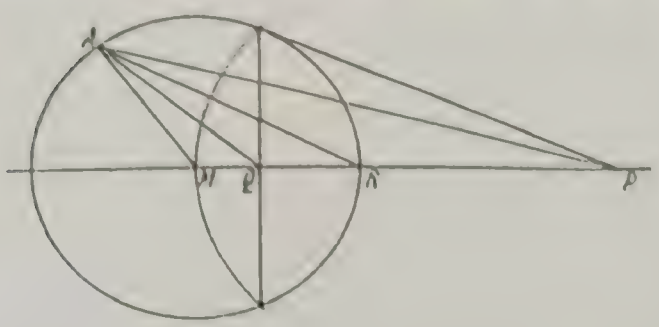

Fig. 9.

Der Verschiebungsstrom durch die Kugeloberfläche muß der gleiche sein, als ob das elektrische Bild vorhanden wäre. Die Influenzladung beträgt also $e' = -ea/l$, was aus dem solenoidalen Charakter des Stromes folgt.

Wir wollen nun noch die Verteilung der Ladung, d. h. die Ladungsdichte in einem beliebigen Punkt der Kugeloberfläche untersuchen. Für die dielektrische Verschiebung in einem Punkt A gilt $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2$, wo

$$4\pi \mathrm{D}_1 = \frac{e}{AP^2} \text{ und } 4\pi \mathrm{D}_2 = -\frac{a}{l}\frac{e}{AQ^2} = -\frac{l}{a}\frac{e}{AP^2}.$$

Wir wissen bereits, daß die Richtung der resultierenden dielektrischen Verschiebung senkrecht zur Oberfläche steht. Also ist:

$$\mathrm{D}_n = \mathrm{D}_1 \cos MAP + \mathrm{D}_2 \cos MAQ.$$

Nun ist

$$\cos M\,A\,P = \frac{A\,P^2 + a^2 - l^2}{2\,a \cdot A\,P}$$

und

$$\cos M\,A\,Q = \frac{A\,Q^2 + a^2 - l'^2}{2\,a \cdot A\,Q} = \frac{A\,P^2 + l^2 - a^2}{2\,l \cdot A\,P},$$

also wird

$$4\pi D_n = \frac{e}{AP^2}\left\{\frac{A\,P^2 + a^2 - l^2}{2\,a \cdot A\,P} - \frac{l}{a} \cdot \frac{AP^2 + l^2 - a^2}{2\,l \cdot A\,P}\right\} = \frac{e \cdot (a^2 - l^2)}{a} \cdot \frac{1}{AP^3}. \quad (10)$$

Die Oberflächendichte ist somit umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes von P.

Betrachten wir nun den Fall, bei dem die Kugel mit dem Mittelpunkt M nicht zur Erde abgeleitet, sondern isoliert aufgestellt ist und ursprünglich keine Ladung besaß. Es ist klar, daß sie dann auch nach Anbringen des geladenen Punktes P im ganzen keine Ladung besitzen darf. Wir erhalten eine Lösung, die im Raum außerhalb der Kugel allen angegebenen Bedingungen genügt, wenn wir über das soeben berechnete Feld noch das Feld superponieren, das durch eine Ladung $+ e \cdot a/l$ im Punkt M entsteht. Man kann leicht einsehen, daß jetzt die Kugel an der P zugewandten Seite negativ, an der abgewandten Seite positiv geladen wird (wobei e als positive Ladung angenommen ist).

Wir können jetzt auch die Störung berechnen, die eine isolierte ungeladene Kugel in einem homogenen elektrischen Feld verursacht, d. h. in einem Feld, in dem die elektrische Kraft überall gleich groß und gleich gerichtet ist. Wählen wir diese Richtung als die der negativen X-Achse. Das Problem wird zu einem Grenzfall des vorigen, wenn wir annehmen, daß der Punkt P in Richtung der positiven X-Achse von M fortwandert und dabei seine Ladung so zunimmt, daß im ganzen ungestörten Feld die Richtung der elektrischen Kraft sich der der X-Richtung nähert, während ihre Größe den Wert annimmt

$$\lim \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e}{l^2} = E_0.$$

Das Feld, das entsteht, wenn wir jetzt die Kugel um M anbringen, berechnen wir, indem wir dem homogenen Feld zwei Felder super-

ponieren; das eine rührt von der Ladung $e\,a/l$ in M her, das andere von einer Ladung $-e\,a/l$ in Q, wobei Q von M aus gesehen in der X-Richtung in einem Abstand $\delta = a^2/l$ liegt, der im Grenzübergang unendlich klein wird. Diese beiden Ladungen zusammen besitzen ein elektrisches Moment. Für das Potential, das sie in einem Punkt A des Feldes hervorrufen, finden wir

$$\Phi_1 = +\frac{a\,e}{4\pi l}\left(\frac{1}{A\,M} - \frac{1}{A\,Q}\right) = -\frac{a\,e}{4\pi l}\frac{\delta\cos\vartheta}{r^2},$$

wenn r den Abstand von A bis M oder Q und ϑ den Winkel $A\,M\,Q$ bedeutet. In der Grenze wird $\lim e\,\delta/l = a^2 \lim e/l^2 = 4\pi a^2 E_0$ und $\cos\vartheta = x/r$, also

$$\Phi_1 = E_0\frac{a^3\cos\vartheta}{r^2} = E_0\frac{a^3\,x}{r^3},$$

so daß wir für das ganze Potential finden:

$$\Phi = C - E_0 x + E_0\frac{a^3\,x}{r^3}. \tag{11}$$

Ferner folgt jetzt, stets unter der Voraussetzung, daß das umgebende Dielektrikum Luft ist, für die Ladungsdichte an der Kugeloberfläche

$$D_n = E_n = -\left[\frac{x}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]_{r=a} = 3\,E_0\cos\vartheta \tag{12}$$

Dieses Problem hätte sich natürlich auch unabhängig von dem vorigen behandeln lassen.

Wir werden jetzt noch den Weg anzeigen, wie man die Ladungsverteilung auf zwei sich ausschließenden Kugeln berechnet. Dieses Problem ist vielfach behandelt worden (u. a. von POISSON, MAXWELL, KIRCHHOFF). Wir wollen der Methode von LORD KELVIN folgen, wobei wir eine unendliche Reihe elektrischer Bilder benützen. M_1 sei der Mittelpunkt der ersten Kugel (Fig. 10), M_2 der der zweiten, a_1 und a_2 seien ihre Radien und der Abstand betrage $M_1\,M_2 = b$. Die erste Kugel sei zur Erde abgeleitet, die zweite trage eine gegebene Ladung. Wenn wir nun durch irgendeine Methode eine Lösung finden, die im Raum außerhalb der Kugeln allen vorgegebenen Bedingungen genügt, so können wir die dieser Lösung

entsprechende Ladung der zweiten Kugel berechnen und durch Multiplikation mit einem passenden Faktor die gesuchte Lösung erhalten.

Denken wir uns zunächst im Punkt M_2 eine Ladung e angebracht, so entsteht ein Feld, wobei im Raum außerhalb der Kugel M_2 allen Bedingungen des Problems genügt wird, außer einer: an der Ober-

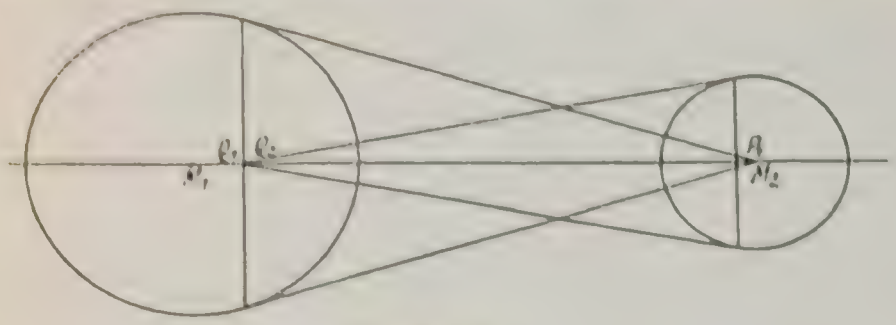

Fig. 10.

fläche der Kugel M_1 ist nämlich nicht überall $\Phi = 0$. Wie oben läßt sich diesem Mangel abhelfen, wenn wir das Feld des elektrischen Bildes von M_2 in bezug auf die Kugel M_1 superponieren, d. h. einen geladenen Punkt Q_1 mit der Ladung $-\,e\,a_1/b$ so anbringen, daß $M_1 Q_1 = a_1^2/b$ ist. Dadurch wird allerdings der Forderung widersprochen, daß an der Oberfläche der Kugel M_2 das Potential konstant sei. Wir korrigieren diesen Fehler, in dem wir das elektrische Bild von Q_1 in bezug auf die Kugel M_2 anbringen, d. h. in einen Punkt P_1, für den

$$M_2 P_1 = \frac{a_2^2}{b - \frac{a_1^2}{b}}$$

ist, bringen wir die Ladung

$$e \cdot \frac{a_1}{b} \cdot \frac{a_2}{b - \frac{a_1^2}{b}} .$$

Dadurch wird nun wieder die Potentialbedingung an der Oberfläche der Kugel M_1 unerfüllt, was wir durch ein elektrisches Bild von P_1 bezüglich der Kugel M_2 korrigieren usf. Auf diese Weise wird das Potential in einem beliebigen Punkt des Feldes mit Hilfe einer unendlichen Reihe dargestellt. In der schon beschriebenen Weise folgt aus dem Potential dann die elektrische Kraft, die dielektrische Verschiebung und die Ladungsdichte an den Oberflächen der Kugeln.

In analoger Weise kann das elektrische Feld im Raum zwischen zwei Kugeln gefunden werden, von denen die kleinere vollständig durch die größeren eingeschlossen wird.

§ 4. Die Methode der Inversion.

Wir wollen eine Methode besprechen, die uns instand setzt, das elektrische Feld im Raum außerhalb eines Leiters in bestimmten Fällen zu berechnen, falls uns die Lösung des Problems für andere bekannt ist. Es ist dies die Methode der Inversion. Dazu seien zunächst einige Bemerkungen vorausgeschickt.

Es sei Φ das Potential im Feld eines geladenen Leiters und P ein im Abstande r befindlicher Punkt. Wir wenden den GREENschen Satz (S. 30) an, verstehen unter U das Potential Φ, unter V die Funktion $1/r$ und erstrecken das Raumintegral über den Raum außerhalb des Leiters, wobei wir aber eine kleine Kugel um P, deren Radius wir schließlich gegen Null konvergieren lassen, ausschließen. Den Außenraum denken wir uns durch eine unendlich große Kugel B begrenzt. Da $\Delta U = 0$ und $\Delta V = 0$ ist, so können wir Gleichung (32) (S. 31) anwenden; an jeder der in Frage kommenden Oberflächen ist n die in bezug auf das Integrationsgebiet nach außen gezogene Normale. Wir berücksichtigen dabei folgendes: 1. das Integral über die Kugel B verschwindet, 2. über die Leiteroberfläche (für die Φ einen konstanten Wert hat) integriert, gilt, wovon man sich leicht überzeugen kann,

$$\int \Phi \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = \Phi \cdot \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = 0$$

und, wenn $\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ die Flächendichte der Ladung bedeutet,

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = \int \frac{\omega}{r} d\sigma ;$$

3. von den Integralen

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma \text{ und } \int \Phi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma ,$$

erstreckt über die kleine Kugel um P, verschwindet das erstere beim Grenzübergang, da $\partial \Phi/\partial n$ überall endlich bleibt, während das zweite, für das man schreiben kann

$$\int \frac{\Phi}{r^2} d\sigma ,$$

den mit 4π multiplizierten Mittelwert von Φ an der Kugeloberfläche darstellt, sich also dem Grenzwert $4\pi \Phi_P$ nähert. So findet man für den Punkt P

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega}{r} d\sigma . \tag{13}$$

Das gleiche Resultat gilt auch, wenn P innerhalb des Leiters liegt und darum Φ_P gleich dem Wert Φ an der Leiteroberfläche sein muß. Um dies zu beweisen, kann man wieder dieselben Überlegungen wie soeben durchführen. Als Integrationsgebiet wählen wir den Raum außerhalb des Leiters bis an die unendlich große Kugeloberfläche. Eine Kugel um P brauchen wir jetzt nicht davon auszuschließen, und das erste der oben angeführten Integrale über die Leiteroberfläche wird

$$\Phi \int \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = 4\pi\Phi = 4\pi\Phi_P .$$

Diese Betrachtungen lassen sich auf eine beliebige Anzahl von Leitern, die sich im Äther befinden, ausdehnen. Stets ist Gleichung (13) gültig, sowohl im äußeren Feld als auch im Innern der Leiter, falls man das Integral über die Oberflächen aller Leiter erstreckt. Die Gleichung

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \Sigma \frac{e_k}{r_k}, \tag{13'}$$

die, wie wir zeigten, das Potential bei Anwesenheit einer Anzahl mit der Elektrizitätsmenge e_k geladener Punkte bestimmt, bleibt auch jetzt gültig, wenn man an Stelle von e_k die Ladungen $\omega\, d\sigma$ der Oberflächenelemente einsetzt.

Allerdings kann die Dichteverteilung der Ladungen nicht willkürlich gegeben sein, denn das auf diese Weise berechnete Potential würde im allgemeinen nicht der Bedingung genügen, für alle Punkte eines jeden Leiters konstant zu sein.

Wir betrachten nun ein willkürliches System und invertieren es nach der aus der Geometrie bekannten Weise in bezug auf einen bestimmten Punkt O, d. h. wir denken uns eine Kugel mit dem Radius a, die O zum Mittelpunkt hat; wir wollen sie die Kugel O nennen. Dem Punkt P ordnen wir einen invertierten Punkt P' zu, der auf der Geraden $O\,P$ liegt, und für den

$$O\,P \times O\,P' = a^2 \quad \text{ist.}$$

Es ist bekannt, daß auf diese Weise der außerhalb der Kugel O liegende Teil des Systems auf den Raum in der Kugel abgebildet wird; bei dieser Abbildung bleiben Winkel ihrer Größe nach ungeändert, eine Kugel wird im allgemeinen als Kugel abgebildet, eine Kugel jedoch, die durch den Punkt O geht als Ebene; umgekehrt wird eine Ebene im allgemeinen als Kugel abgebildet, die durch O geht, während eine Ebene, die selbst durch O geht, mit ihrem eignen Bild zusammenfällt. Da die Kugel die einzige einfache Oberfläche ist, die bei der Inversion wieder in eine einfache Fläche übergeht, so bleiben die Anwendungen dieser Methode allerdings auf Kugeln beschränkt.

Wenn sich nun in einem Punkt A_k des betrachteten Systems eine Ladung e_k befindet, so können wir in dem durch Inversion entstandenen Punkt A_k' eine Ladung e_k' so annehmen, daß

$$e_k' = e_k \frac{a}{O\,A_k} = e_k \frac{O\,A_k'}{a} \tag{14}$$

ist. Bis auf das Vorzeichen deckt sich der Ausdruck mit dem des elektrischen Bildes von A_k in bezug auf die Kugel O. Betrachten wir jetzt einen beliebigen Punkt P, so herrscht in ihm ein Potential

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \Sigma \frac{e_k}{P\,A_k},$$

während das invertierte System in dem entsprechenden Punkt P' ein Potential hervorruft:

$$\Phi' = \frac{1}{4\pi} \Sigma \frac{e_k'}{P'\,A_k'}.$$

Nun ist

$$P'\,A_k' = P\,A_k \cdot \frac{O\,A_k'}{O\,P},$$

also

$$\frac{e_k'}{P' A_k'} = \frac{e_k}{P A_k} \cdot \frac{O A_k'}{a} \cdot \frac{O P}{O A_k'} = \frac{e_k}{P A_k} \frac{O P}{a}$$

und somit

$$\Phi' = \Phi \frac{O P}{a} = \Phi \frac{a}{O P'}. \tag{15}$$

Aus dem Potential in einem Punkt des ersten Systems läßt sich also auf sehr einfache Weise das Potential in dem zugehörigen Punkt des invertierten Systems berechnen.

Sind die geladenen Punkte A_k Oberflächenelemente eines Leiters, so geht bei der Inversion dieser Leiter in einen anderen über. Gleichwohl wird im invertierten System das Potential nicht der Bedingung genügen, für alle Punkte des Leiters einen konstanten Wert zu besitzen. Man sieht das ohne weiteres aus der letzten Gleichung, denn a ist eine Konstante, Φ ist für alle Punkte des Leiters gleich groß, aber $O P'$ ist variabel. Wohl ist die Bedingung erfüllt, wenn $\Phi = O$ ist, denn dann wird auch für alle Punkte des invertierten Systems $\Phi' = 0$. Wenn also das erste System aus einem oder mehreren Leitern besteht, die alle zur Erde abgeleitet sind, und aus einem oder mehreren elektrischen Punkten, und wenn auch im invertierten System alle Leiter mit der Erde verbunden sind, so finden wir durch die Inversion den wahren Zustand des Systems. Auf diese Weise läßt sich z. B. die Influenz eines geladenen Punktes auf einen geerdeten Kugelleiter zurückführen auf das sehr einfache Problem der Influenz eines geladenen Punktes auf eine Ebene, deren Potential dauernd auf Null gehalten wird. Diese letzte Frage läßt sich sehr leicht mit Hilfe der Theorie elektrischer Bilder lösen: das elektrische Bild eines geladenen Punktes liegt in seinem Spiegelbild in bezug auf die Ebene und trägt die entgegengesetzt gleiche Ladung.

Die Theorie der Inversion läßt sich auch noch in anderer Weise anwenden. Wenn das betrachtete System aus einem einzelnen Leiter besteht oder aus mehreren, die alle das gleiche Potential Φ haben, so sehen wir aus Gleichung (15): das Potential eines Leiters im invertierten System wird in jedem Punkt Null, falls wir dem vorhandenen Feld ein zweites von solcher Größe und Richtung superponieren, wie es durch eine Ladung $-4\pi a \Phi$ im Punkt O hervorgerufen würde. Auf diese Weise läßt sich ein Problem, bei dem nach

der Influenz eines geladenen Punktes auf einen geerdeten Leiter gefragt wird, auf die Untersuchung des Feldes in der Umgebung eines isolierten Leiters zurückführen. Als Beispiel für diese Methode werden wir den schon früher behandelten Fall einer mit der Erde verbundenen Kugel M, der ein die Ladung e tragender Punkt gegenübersteht, besprechen.

Wir invertieren also (Fig. 11) die Kugel M vom Radius R in bezug auf O, wodurch wir eine Kugel M' mit dem Radius R' finden. Das Feld, das wir erhalten, wenn wir diese Kugel auf ein Potential $\Phi' = -\frac{e}{4\pi a}$ aufladen, liefert uns bei der Inversion das gesuchte Feld. Wir wollen

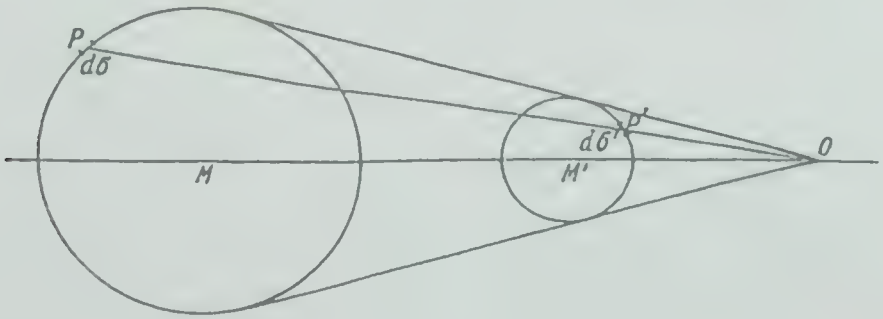

Fig. 11.

z. B. wieder die Ladung berechnen, die ein Element $d\sigma$ im Punkte P unserer Kugel besitzt. Auf dem entsprechenden Element $d\sigma'$ im Punkt P' der Kugel M' befindet sich die Ladung $\frac{\Phi'}{R'}\, d\sigma'$; diese ergibt bei Inversion eine Ladung $\frac{\Phi'}{R'}\, d\sigma' \frac{OP}{a}$ auf dem Element $d\sigma$. Nun ist

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{OP'^2}{OP^2} = \frac{a^4}{OP^4},$$

daraus folgt für die Ladung des Elementes $d\sigma$ der Wert $\frac{\Phi'}{R'} \frac{a^3}{OP^3}\, d\sigma$; die Dichte ist, wie wir das von früher schon wußten, umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes des betrachteten Elementes von Punkt O. Es läßt sich übrigens auch sehr leicht zeigen, daß das Resultat dieser Methode mit dem früheren vollständig übereinstimmt. Das Feld außerhalb der Kugel M' stimmt nämlich vollkommen mit

demjenigen überein, das ein in M' befindlicher Punkt mit der Ladung $4\pi R' \Phi' = -e\frac{R'}{a}$ hervorruft. Das durch Inversion entstandene Feld ist also außerhalb der Kugel M identisch mit dem Feld, das durch eine Ladung $-e\frac{R'}{a}\cdot\frac{a}{O M'} = -e\frac{R}{O M}$ in einem Punkt Q innerhalb dieser Kugel entsteht, und dieser Punkt Q ist gerade das elektrische Bild von O in bezug auf die Kugel M. Denn, denken wir uns die Gerade $O M' M$ gezogen, die die beiden Kugeln in L' und N' bzw. in L und N schneidet, so folgt aus dem Umstand, daß $O L'$, $O M'$ und $O N'$ eine arithmetische Reihe bilden, eine harmonische Reihe für $O L$, $O Q$ und $O N$.

Betrachten wir nun zwei auf gleiches Potential gebrachte Kugeln. Haben wir das Feld in ihrer Umgebung berechnet, so können wir durch eine Inversion auch die Frage nach dem Feld in der Umgebung zweier geerdeter Kugeln lösen, denen gegenüber sich ein influenzierender Punkt befindet. Welche der Aufgaben leichter zu lösen ist, ist Sache persönlichen Geschmacks. Man kann durch Inversion aber die zwei Kugeln auch konzentrisch machen, und dann ist das zweite Problem sicherlich das einfachere. Es läßt sich leicht zeigen, daß, wenn eine Kugel in bezug auf das Zentrum O invertiert wird, und wenn O' der Punkt ist, der bei der Inversion in den Mittelpunkt der neuen Kugel übergeht, dann O und O' harmonisch zu den Punkten liegen, in denen die Gerade $O O'$ die gegebene Kugeloberfläche schnei-

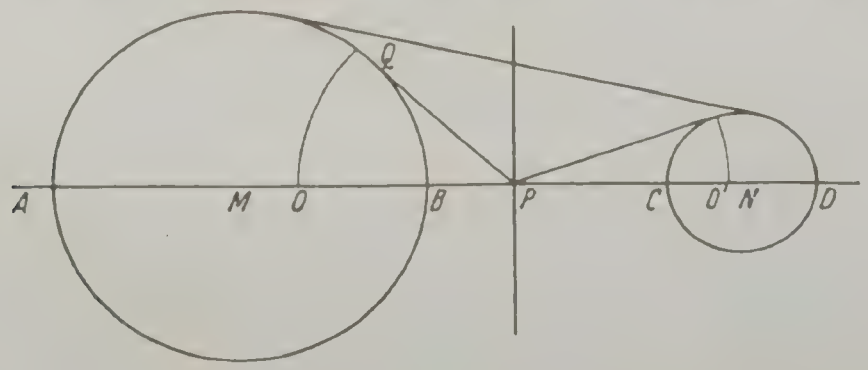

Fig. 12.

det. Dieser Satz gilt sowohl wenn das Zentrum O innerhalb als auch wenn es außerhalb der Oberfläche liegt. Wenn zwei Kugeln M und N (Fig. 12) gegeben sind und wir dasjenige Inversionszentrum finden

wollen, das die Kugeln in zwei konzentrische überführt, so denken wir uns die Zentrale gezogen, die die Kugeln M und N in A, B und in C, D schneidet. Das Inversionszentrum O und der obengenannte Punkt O' müssen nun auf dieser Zentrale liegen und müssen ferner sowohl zu A und B als auch zu C und D harmonisch liegen. P sei der Punkt, in dem die Potenzfläche der beiden Kugeln die Zentrale schneidet und PQ sei die Tangente an eine der Kugeln. Die Kugel um P mit PQ als Radius schneidet nun die Gerade MN in den gesuchten Punkten O und O'; denn es ist $PO^2 = PQ^2 = PA \cdot PB$ und entsprechend $PO'^2 = PC \cdot PD$. Wir können jetzt das Feld berechnen, das zwischen den beiden konzentrischen Kugeln O' herrscht, wenn im Punkt O eine bestimmte Ladung e vorhanden ist und die beiden Kugeln zur Erde abgeleitet sind. Dies ist möglich mit Hilfe der Theorie der elektrischen Bilder, die in diesem Fall durch sehr einfache Reihen zu entwickeln sind. Aus den in dieser Weise gefundenen Ladungen auf den konzentrischen Kugeln leiten wir weiter nach Gleichung (14) die korrespondierenden Ladungen auf den zwei ursprünglich gegebenen Kugeln ab; diese Ladungen rufen in den einzelnen Punkten einer jeden Kugel das Potential $-e/4\pi a$ hervor.

Die Ladungsverteilung auf zwei einander berührenden Kugeln läßt sich berechnen, wenn man das System in bezug auf den Berührungspunkt invertiert. Wir haben dann das Feld zwischen zwei mit der Erde verbundenen Ebenen, die unter dem Einfluß eines dazwischenliegenden, geladenen Punktes stehen, aufzusuchen. Auch diese Rechnung läßt sich leicht mit Hilfe der Theorie der elektrischen Bilder durchführen. Die Lösung der gestellten Aufgabe erhält man, wenn man zum Schluß wieder zurückinvertiert.

§ 5. Die Energie im elektrostatischen Feld.

Wir wollen jetzt die Energie in einem elektrostatischen Feld näher untersuchen. Zunächst werden wir die im Felde eines Leiters aufgespeicherte Energie bestimmen, wenn der Leiter in einem homogenen, unendlich ausgedehnten Dielektrikum auf das Potential Φ_1 gebracht ist. Nennen wir die Kapazität C, so ist die auf dem Leiter befindliche Ladungsmenge $e_1 = C \cdot \Phi_1$. Die Frage deckt sich mit der anderen, die Arbeit zu bestimmen, die notwendig ist, um die Elektrizitätsmenge e_1 aus unendlich großem Abstand auf den Leiter

zu bringen. Wir betrachten irgendeinen Zeitpunkt während der Ladung, wobei das Potential des Leiters Φ' und somit die Ladung $e = C \cdot \Phi'$ sein möge. Bringen wir nun eine sehr kleine Elektrizitätsmenge $d\,e$, z. B. mit einem kleinen Probekügelchen längs eines beliebigen Weges s aus dem Unendlichen auf den Leiter, so wirkt in jedem Punkt des Weges eine Kraft auf unser Probekügelchen, deren Komponente in Richtung der Tangente an den Weg den Wert $-d\,e \cdot \partial\,\Phi/\partial\,s$ besitzt. Die Arbeit, die im ganzen geleistet werden muß, um diese Gegenkräfte zu überwinden, ist somit:

$$d\,e \int_{\infty} \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,s}\,d\,s = \Phi'\,d\,e\,.$$

Diese Arbeit ist also unabhängig von dem Weg, auf dem die Elektrizitätsmenge auf den Leiter gebracht wird. Die Ladung wächst nun an auf $e + d\,e$, das Potential auf $\Phi' + d\,\Phi' = (e + d\,e)/C$. Für die gesamte Arbeit, die bei der Ladung geleistet werden muß, ergibt sich

$$\int_0^{e_1} \Phi'\,d\,e = \frac{1}{C}\int_0^{e_1} e\,d\,e = \frac{1}{2}\,\frac{e_1^{\,2}}{C} = \frac{1}{2}\,C\,\Phi_1^{\,2} = \frac{1}{2}\,e_1\,\Phi_1\,.$$

In der gleichen Art läßt sich die Energie mehrerer geladener Leiter finden. Sind im Endzustand die Ladungen der verschiedenen Leiter e_1, e_2 . . . und ihre Potentiale Φ_1, Φ_2 . . ., so finden wir für die Energie $\frac{1}{2}\,\Sigma\,e_\nu\,\Phi_\nu$.

Da nach der gegenwärtigen Anschauung diese Energie dem Zustand eines Mediums zugeschrieben wird, so ist es für uns wichtig, den Ausdruck in ein Raumintegral zu überführen, das dann über den ganzen Raum außerhalb der Leiter erstreckt werden muß. Zu diesem Zweck erinnern wir uns daran, daß für jeden einzelnen Leiter $e_\nu = \int_\nu \mathrm{D}_n\,d\,\sigma$ ist. Dann gilt für die gesamte Energie der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\int \Phi\,\mathrm{D}_n\,d\,\sigma,$$

wobei das Integral über die Oberflächen aller Leiter zu erstrecken ist.

Dieses Integral läßt sich in der uns bekannten Art und Weise in ein Raumintegral transformieren. Wir denken uns den betrachteten Raum wieder durch irgendeine Fläche umschlossen, deren sämtliche Punkte sich in sehr großem Abstand befinden. Bei der Transformation tritt dann auch ein Integral über diese Fläche auf, doch wird es Null, wenn die Fläche in unendlich großen Abstand rückt, wie wir das

für Integrale dieser Art schon öfters nachgewiesen haben. Wir erhalten also:

$$\frac{1}{2}\int \Phi\, \mathrm{D}_n\, d\sigma = -\frac{1}{2}\int \Phi\left(\frac{\partial \mathrm{D}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{D}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{D}_z}{\partial z}\right) dS$$
$$-\frac{1}{2}\int\left(\mathrm{D}_x\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\mathrm{D}_y\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\mathrm{D}_z\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) dS$$

und da $\operatorname{div} \mathrm{D} = O$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\mathrm{E}_x$ usf. ist,

$$\tfrac{1}{2}\int \Phi\, \mathrm{D}_n\, d\sigma = \tfrac{1}{2}\int (\mathrm{D}_x\,\mathrm{E}_x + \mathrm{D}_y\,\mathrm{E}_y + \mathrm{D}_z\,\mathrm{E}_z)\, dS\,.$$

Das einfachste ist nun, anzunehmen, daß in jedem Element dS die Energie $\frac{1}{2}(\mathrm{D}_x\,\mathrm{E}_x + \mathrm{D}_y\,\mathrm{E}_y + \mathrm{D}_z\,\mathrm{E}_z)\, dS$ aufgespeichert ist. Doch dürfen wir nicht vergessen, daß unsere soeben durchgeführte Ableitung uns allein die Energie des ganzen Raumes angibt und uns eigentlich nichts über die Energie in einem bestimmten Raumteil aussagt. Doch läßt sich folgendermaßen argumentieren: wenn wir das die Leiter umgebende Dielektrikum als Energiespeicher betrachten, so ist die oben stehende Annahme die vernünftigste; sie verteilt die Energie so über die einzelnen Raumelemente, daß für das ganze Feld der richtige Ausdruck herauskommt. Wir finden also in jedem Punkt eine Energie, die, pro Volumeinheit berechnet, durch das skalare Produkt $\frac{1}{2}(\mathrm{D}\cdot\mathrm{E})$ ausgedrückt wird.

Ist das Dielektrikum isotrop, so läßt sich auch schreiben: $\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{E}^2$ oder $\frac{1}{2\varepsilon}\mathrm{D}^2$, und für den freien Äther $\frac{1}{2}\mathrm{E}^2$ oder $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2$ (in elektromagnetischen Einheiten $\mathrm{E}^2/8\pi c^2$ oder $2\pi c^2\,\mathrm{D}^2$, in elektrostatischen $\mathrm{E}^2/8\pi$ oder $2\pi\,\mathrm{D}^2$).

§ 6. Sätze über das Energie-Minimum.

Wir werden jetzt zwei Sätze über die Energie beweisen, die in der Elektrostatik eine wichtige Rolle spielen. Das Feld genügt, wie wir wissen, zwei Bedingungen: die dielektrische Verschiebung ist solenoidal und die elektrische Kraft ist ein Potentialvektor, wobei das Potential an der Oberfläche eines jeden Leiters konstant ist. Außerdem besteht zwischen der dielektrischen Verschiebung und der elektrischen Kraft die bekannte Beziehung $\mathrm{D} = \varepsilon\,\mathrm{E}$. Unsere beiden Sätze sagen nun aus, daß in dem wirklich eintretenden Zustand,

die Energie ein Minimum ist, d. h. kleiner ist, als wenn das Feld nur eine der Bedingungen erfüllte.

Der erste Satz lautet: wenn sich in einem isotropen, homogenen Dielektrikum eine Anzahl Leiter befinden, deren jeder eine gegebene Ladung trägt (gleich dem Integral der dielektrischen Verschiebung über seine Oberfläche erstreckt), so ist unter allen Lösungen, die den gegebenen Ladungen und der Bedingung für den solenoidalen Charakter der dielektrischen Verschiebung Rechnung tragen, diejenige die richtige, bei der die Gesamtenergie in D ausgedrückt den kleinsten Wert besitzt.

Ist in dem wirklich bestehenden Zustand D die dielektrische Verschiebung und $E = 1/\varepsilon\, D$ die elektrische Kraft, so ist div $D = 0$, E ist ein Potentialvektor und wir erhalten für jeden der k Leiter $\int_k D_n\, d\sigma = e_k$. Als Gesamtenergie erhalten wir: $A = \frac{1}{2\varepsilon}\int D^2\, dS$, wobei das Integral über den Raum außerhalb der Leiter zu erstrecken ist.

Wir wollen diesen Zustand mit einem beliebigen anderen vergleichen, in dem auch die dielektrische Verschiebung — wir wollen sie mit $D + D'$ bezeichnen — solenoidal ist, wo also gilt div $(D + D') = 0$; dann ist auch div $D' = 0$, während für jeden Leiter $\int_k (D + D')_n\, d\sigma = e_k$ und somit $\int D_n'\, d\sigma = 0$ ist. Wir erhalten jetzt als Energie:

$$A' = \frac{1}{2\varepsilon}\int (D + D')^2 dS = \frac{1}{2\varepsilon}\int \{(D_x + D_x')^2 + (D_y + D_y')^2 + (D_z + D_z')^2\} dS,$$

also

$$A' = A + \frac{1}{2\varepsilon}\int (D_x'^2 + D_y'^2 + D_z'^2)\, dS + \frac{1}{\varepsilon}\int (D_x D_x' + D_y D_y' + D_z D_z')\, dS.$$

Nun ist das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung positiv und wir werden beweisen, daß das dritte verschwindet. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int (D_x D_x' + D_y D_y' + D_z D_z')\, dS = -\int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} D_x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} D_y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} D_z'\right) dS,$$

wobei Φ das Potential bedeutet. Das letzte Integral wandeln wir um in

$$\tfrac{1}{2}\int \Phi\, D_n'\, d\sigma + \int \Phi\, \mathrm{div}\, D'\, dS,$$

das Integral des ersten Terms muß über sämtliche Oberflächen der Leiter erstreckt werden, wobei das Flächenintegral über die Oberfläche in unendlich großem Abstand (wie wir ein solches Integral schon oft genannt haben) verschwindet. Für jeden der Leiter ist Φ konstant und der Beitrag eines jeden Leiters zum Integral wird $\frac{1}{2}\Phi_k \int_k D'_n \, d\sigma = 0$. Damit wird der ganze erste Term gleich Null. Das zweite Integral ist über den ganzen Raum außerhalb der Leiter zu erstrecken und ist Null, da überall div $D' = 0$ ist. Also folgt, das $A' > A$, was zu beweisen war.

Der zweite Satz bezieht sich auf den Fall, bei dem das Potential auf jedem Leiter gegeben ist. Wir vergleichen nun den wahren Zustand, bei dem das Potential Φ und die elektrische Kraft E ist, mit einem beliebigen anderen, bei dem die elektrische Kraft ein Potentialvektor bleibt, und bei dem das Potential an der Oberfläche der Leiter seinen gegebenen Wert behält. Nennen wir hierbei die elektrische Kraft $E + E'$ und das Potential $\Phi + \Phi'$, so ist also auf allen Leitern $\Phi' = 0$.

Im letzteren Falle erhalten wir für die Energie, die wir jetzt in E ausdrücken:

$$A' = \tfrac{1}{2}\varepsilon \int \{(E_x + E_x')^2 + (E_y + E_y')^2 + (E_z + E_z')^2\} \, dS,$$

während für den wahren Zustand gilt:

$$A = \tfrac{1}{2}\varepsilon \int E^2 \, dS,$$

somit wird

$$A' = A + \tfrac{1}{2}\varepsilon \int \{E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2\} \, dS + \varepsilon \int (E_x E_x' + E_y E_y' + E_z E_z') \, dS.$$

Hierin ist wieder der zweite Term positiv, und wir müssen beweisen, daß der dritte gleich Null ist. Die Ableitung ist ganz analog der obigen; wir erhalten

$$\varepsilon \int (E_x E_x' + E_y E_y' + E_z E_z') \, dS = -\varepsilon \int \left(E_x \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + E_y \frac{\partial \Phi'}{\partial y} + E_z \frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) dS$$

$$= \varepsilon \int \Phi' E_n \, d\sigma - \varepsilon \int \Phi' \Delta \Phi \, dS = 0,$$

woraus wieder folgt $A' > A$.

Diese Sätze legen die Annahme nahe, die Energie in einem elektrostatischen Feld als potentielle Energie aufzufassen, die auch in anderen Fällen einem Minimalwert zustrebt. Diese Auf-

fassung deckt sich auch mit dem Bild, das wir uns von einem elektrostatischen Feld gemacht haben; das Aufladen eines Leiters sollte der Verschiebung einer inkompressiblen Flüssigkeit durch die Oberfläche entsprechen und die Energie des Feldes derjenigen der Flüssigkeit nach der Verschiebung; die dielektrische Spannung sucht, den Gleichgewichtszustand wieder herzustellen.

Wir müssen aber im Auge behalten, daß durch diese Annahme nichts bewiesen ist. Im Gegensatz zu uns vertrat Hankel die Meinung, die Wirkungen, die ein geladener Leiter ausübt, seien eine Folge von Wirbelbewegungen auf unendlich kleinen Kreisen der Oberfläche, im Uhrzeigersinn bei einem positiv geladenen Leiter, in entgegengesetzter Richtung bei einem negativ geladenen. Auch die Energie in den Kraftröhren erklärte Hankel durch solche Rotationsbewegungen. Einen noch ganz anderen Standpunkt nimmt Ostwald ein. Er meint, die Physiker legten im allgemeinen viel zu viel Nachdruck auf die Materie, und im Speziellen arbeiteten sie in der Elektrizitätstheorie von Faraday und Maxwell zu sehr mit dem Bild der inkompressiblen Flüssigkeit. Ostwald geht in seinen Betrachtungen von der Energie als dem Grundbegriff aus. Über die Art der Energie sagt er aber nichts aus, als daß es verschiedene Arten gäbe, die nicht näher zu bestimmen seien; eine davon tritt im elektrostatischen Feld auf. Wir wollen diese Ansichten nicht näher erörtern, und im folgenden die Energie im elektrostatischen Feld als potentielle Energie ansehen.

§ 7. Ponderomotorische Kräfte.

Unsere Sätze über das Minimum der Energie können wir anwenden, um die ponderomotorischen Kräfte zu finden, d. h. diejenigen Kräfte, die infolge von Ladungen auf die leitende Materie ausgeübt werden. Unsere Theorie sagt wenig über die Art und den Ursprung dieser Kräfte aus, aber wir können zeigen, daß sie notwendig bestehen müssen und können ihre Größe berechnen. Dazu benutzen wir das aus der Mechanik bekannte Prinzip der virtuellen Verschiebung. Denken wir uns äußere Kräfte an dem System so wirkend, daß Gleichgewicht besteht, und geben wir dem System eine beliebige, unendlich kleine Lagenänderung (eine Verschiebung, Drehung oder Deformation der Leiter), ohne die Ladungen zu verändern, so ist die Zunahme der potentiellen Energie des Systems gleich der Arbeit, die die äußeren Kräfte leisten. Die Veränderung

des Systems läßt sich für jedes Oberflächenelement der verschiedenen Leiter durch einen Vektor δ angeben, der die Verschiebung, die das Element erfahren hat, bedeutet.

Die Änderung der Feldenergie entsteht durch zwei Ursachen. Zunächst gibt es Volumelemente, die zuerst außerhalb der Leiter lagen, also Energie besaßen und später nicht mehr und andere, bei denen das Umgekehrte der Fall ist. Nennen wir die Energie pro Volumeinheit U, so finden wir im ganzen eine Energieänderung $-\int U\,\delta\,\cos(\delta\,n)\,d\sigma$, wobei das Integral über alle Leiter zu erstrecken ist und n die Richtung der nach außen gezogenen Normalen bedeutet. Bei der Ableitung dieses Ausdruckes hat man zu bedenken, daß für Elemente, die nach außen geschoben werden und darum Raumelemente vorstellen, in denen zuerst Energie steckte und später nicht, $\cos(\delta\,n)$ positiv ist, also der Inhalt des betreffenden Raumelementes $+\,\delta\cos(\delta\,n)\,d\sigma$ ist. Solch ein Element ruft also eine Verminderung der Feldenergie hervor, und sein Beitrag zum Integral ist mit dem Minuszeichen einzusetzen. Die nach innen verschobenen Elemente bedingen eine Zunahme der Feldenergie, für solch ein Element ist $\cos(\delta\,n)$ negativ; nennen wir die Energie pro Volumeinheit in dem neuen Zustand des Raumelementes U', so erhalten wir für die Energievermehrung einen Ausdruck ebenfalls mit dem Minuszeichen, da die Größe des Elementes jetzt $-\,\delta\,\cos(\delta\,n)\,d\sigma$ ist. U' ist von U, dem ursprünglichen Zustand im Oberflächenelement nur unendlich wenig verschieden, so daß wir unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung für den Beitrag zum Integral $-\,U\,\delta\,\cos(\delta\,n)\,d\sigma$ in Rechnung zu setzen haben.

An zweiter Stelle haben wir zu bedenken, daß im ganzen Dielektrikum ein etwas modifizierter Zustand herrschen wird. Denn die dielektrischen Verschiebungslinien standen senkrecht auf den ursprünglichen Leiteroberflächen, und würden im allgemeinen, falls sie sich nicht änderten, nicht mehr senkrecht auf den veränderten Oberflächen stehen. Es muß darum ein neuer Gleichgewichtszustand eintreten, für den diese Bedingung wieder erfüllt ist, und bei dem die dielektrische Verschiebung in einem Punkt im Felde der dielektrischen Verschiebung sich um einen unendlich kleinen Betrag von der Größenordnung δ von dem ursprünglichen Wert unterscheidet. P sei dieser veränderte Zustand und P' derjenige, der herrschen würde, falls nach der Verschiebung der Leiteroberflächen das Feld außerhalb das gleiche

geblieben wäre. Wir hätten dann außer der schon berechneten Energieänderung noch den Energieunterschied in den Zuständen P und P' zu berücksichtigen. In den Zuständen P und P' haben nun die Oberflächen die gleiche Lage, ihre Ladungen die gleiche Größe, während in beiden Fällen die dielektrische Verschiebung solenoidal ist. Aus der ersten Minimumforderung folgt, daß die Energie im Zustand P ein Minimum ist. Wir schließen daraus, daß der soeben betrachtete Unterschied eine Größe von der Ordnung δ^2 ist, also vernachlässigt werden kann.

Zusammenfassend finden wir also, daß bei der betrachteten, willkürlichen, unendlich kleinen Veränderung die Kräfte, die den ponderomotorischen Kräften das Gleichgewicht halten, eine Arbeit verrichten, die gegeben ist durch

$$-\int U\,\delta\,\cos\,(\delta\,n)\,d\,\sigma,$$

die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte selbst ist also

$$\int U\,\delta\cos\,(\delta\,n)\,d\,\sigma,$$

und wir haben nun ein solches System von Kräften zu finden, das dieser Forderung bei jeder unendlich kleinen Veränderung des Systems genügt. Denken wir uns an jedem Oberflächenelement $d\,\sigma$ eine Kraft $K\,d\,\sigma$ wirkend, so beträgt die Arbeit dieser Kräfte bei der betrachteten Verschiebung

$$\int K\,\delta\cos\,(\delta\,K)\,d\,\sigma;$$

für jeden möglichen Wert der Verschiebung muß also sein:

$$\int U\,\delta\cos\,(\delta\,n)\,d\,\sigma = \int K\,\delta\cos\,(\delta\,K)\,d\,\sigma.$$

Man sieht ohne weiteres ein, daß die Bedingung dafür lautet: K muß überall die Richtung der nach außen auf die Leiteroberfläche gezogenen Normalen haben, und ferner muß sein

$$K = U.$$

§ 8. Mehrere Dielektrika.

Wie weit behalten unsere letzten Betrachtungen Gültigkeit, wenn wir es mit mehreren und nicht nur mit einem einzelnen, homogenen Dielektrikum zu tun haben?

Der Ausdruck $\Sigma\,\frac{1}{2}\,e_\nu\,\Phi_\nu$ für die Energie im Feld rund um eine Anzahl Leiter mit den Ladungen e_ν und den Potentialen Φ_ν, den wir

früher für ein System von Leitern in Luft gefunden haben, bleibt unverändert bestehen. Doch könnte man Bedenken gegen die früher gegebene Ableitung hegen, wenn flüssige oder feste Dielektrika die Leiter ganz oder teilweise umgeben. Es sollte den Leitern mit Hilfe von Probekörpern eine Ladung erteilt werden, und diese Probekörper sollten, jeder mit einer kleinen Ladung versehen, aus dem Unendlichen herangeführt werden. Welche Arbeit hat man nun aufzuwenden, wenn der Probekörper z. B. durch eine Flüssigkeit geführt werden muß? Dieser Schwierigkeit läßt sich begegnen, wenn man an die Leiter sehr dünne, hohle Röhren angebracht denkt, die in der Luft ausmünden — allerdings nur, wenn die flüssigen oder festen Dielektrika sich nicht bis ins Unendliche hin erstrecken. — Der Feldzustand wird sich dann von dem Zustand ohne Röhren nur unendlich wenig unterscheiden, und die Energie läßt sich darum genau wie früher berechnen. Nach vollendeter Aufladung können die Röhren auch wieder entfernt werden.

Wir wollen zunächst noch ein Beispiel mit einem homogenen Medium behandeln, das jetzt beliebig gewählt sein kann, also auch fest oder flüssig. Wir betrachten einen aus zwei beliebig geformten, leitenden Flächen bestehenden Kondensator, dessen Flächenabstand d, längs der Normalen gemessen, überall klein im Vergleich zu den Krümmungsradien der Kondensatorflächen ist. Zwischen den Flächen befinde sich irgend ein homogenes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante ε, bzw. der spezifischen Induktion ε, was ja bei unserer Wahl der Einheiten auf dasselbe herauskommt. Das Feld zwischen den Flächen berechnet sich ebenso wie bei dem früher betrachteten, ebenen Kondensator, bei dem das Zwischenmedium Luft war. Denn da alle Verschiebungslinien senkrecht auf beiden Oberflächen stehen, lassen sich auch hier die Verschiebungsröhren als Zylinder ansehen, und die dielektrische Verschiebung ist für alle Punkte einer Verschiebungslinie gleich. Das gleiche gilt für die elektrische Kraft und somit ist

$$\mathrm{E} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d}$$

und ferner

$$\mathrm{D} = \varepsilon \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d} .$$

Wenn S die Größe der Oberflächen bedeutet und S so groß ist, daß man die nicht genau zylindrische Form der Verschiebungsröhren am Rand vernachlässigen, ferner diejenigen Verschiebungslinien unberücksichtigt lassen kann, die eventuell die beiden Rückseiten der Kondensatorplatten verbinden, so finden wir für die gesamte Ladung der ersten Platte

$$e = S\,\varepsilon\,\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d}.$$

Bei gegebener Potentialdifferenz ist also die Ladung proportional der spezifischen Induktion des Dielektrikums zwischen den Platten.

Für die Energie ergibt sich

$$\frac{1}{2}\,e\,(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{2}\,\frac{S\,\varepsilon}{d}\,(\Phi_1 - \Phi_2)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{S\,\varepsilon}\,e^2,$$

d. h. bei vorgegebener Potentialdifferenz ist die Energie proportional der spezifischen Induktion, bei vorgegebener Ladung ist sie ihr umgekehrt proportional.

Es läßt sich leicht zeigen, daß dieses letzte Resultat allgemein gültig ist. Zu diesem Zwecke denken wir uns zwei geometrisch kongruente Systeme von Leitern, eines im Äther und das andere in einem homogenen Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε. In beiden Systemen soll auf entsprechenden Leitern das gleiche Potential herrschen, und wir wollen annehmen, daß wir für das eine System das Problem vollständig berechnet haben; wir können dann die Äquipotentialflächen konstruieren und für eine jede den Potentialwert angeben. Das gleiche System von Äquipotentialflächen mit den gleichen Potentialwerten muß auch im zweiten Fall vorhanden sein, denn diese Äquipotentialflächen genügen den Grenzbedingungen an den leitenden Oberflächen, den Grenzbedingungen im Unendlichen, außerhalb der Leiter ist die Laplacesche Gleichung erfüllt, und dadurch sind, wie wir wissen, alle Potentiale eindeutig bestimmt. Die elektrische Kraft ist also in jedem Punkt des Feldes in beiden Systemen gleich, die dielektrische Verschiebung ist somit im zweiten System überall ε mal größer als im ersten, ebenso ist die Ladung überall ε mal größer, und somit auch die gesamte Energie des Feldes.

Ist in beiden Systemen die Ladung als gleich groß vorgegeben, so muß notwendigerweise die dielektrische Verschiebung im zweiten System ebensogroß wie im ersten angenommen werden. Die elektrische

Kraft wird dann $1/\varepsilon$ mal größer und ebenso wird das Potential in jedem Punkt des zweiten Systems, d. h. auch auf den leitenden Oberflächen $1/\varepsilon$ mal so groß. Daraus folgt, daß die Gesamtenergie des Feldes im zweiten System $1/\varepsilon$ von dem Wert im ersten System beträgt.

Aus dem oben für die ponderomotorischen Kräfte gewonnenen Resultat folgt nun direkt, daß diese bei gleichen Ladungen umgekehrt proportional der spezifischen Induktion ε des Mediums und bei gleichen Potentialen der Leiter direkt proportional ε sind. Diese letztere Eigenschaft benutzt man, um die spezifische Induktion z. B. von Flüssigkeiten zu messen. Man vergleicht die Ausschläge der Nadel eines Quadrantelektrometers, das das eine Mal in Luft aufgestellt ist und das andere Mal in der betreffenden Flüssigkeit und dessen zwei Quadrantenpaare beide Male mit den Polen der gleichen Elektrizitätsquellen, z. B. eines galvanischen Elementes verbunden sind.

Wir kehren nun zu dem Fall zurück, bei dem sich im Feld verschiedene Medien befinden, von denen jedes für sich homogen und isotrop ist. Es treten Grenzflächen auf, in denen die Dielektrizitätskonstante sich sprungweise ändert, und wir wissen auch bereits, daß an solch einer Fläche Φ und $\varepsilon \cdot \partial \Phi / \partial n$ stetig sind. Wir wollen beweisen, daß auch jetzt noch die gesamte Energie des Feldes, die $\frac{1}{2} \Sigma e_\nu \Phi_\nu$ beträgt, sich berechnen läßt, wenn man für jedes Volumelement die Energie $\frac{1}{2}(\mathrm{E} \cdot \mathrm{D})$ in Rechnung setzt. Auf Grund der in der Einleitung besprochenen Sätze läßt sich das leicht in derselben Weise zeigen wie für ein einzelnes homogenes Dielektrikum. Wir wollen hier aber mathematisch einen etwas anderen Weg einschlagen, und zwar werden wir in dem Raumintegral, das wir zum Schluß für die Energie finden, eine passende Wahl für die Raumelemente treffen. Natürlich hätten wir früher rechnerisch auch schon so vorgehen können.

Die Verschiebungslinien im Feld laufen von einem Leiter entweder zu einem anderen oder ins Unendliche. An Unstetigkeitsflächen besitzen sie einen Knick, außer, wenn sie gerade die betreffende Fläche senkrecht schneiden. Wir beginnen nun damit, die Oberfläche eines der Leiter in sehr kleine Elemente aufzuteilen; die Verschiebungslinien, die von einem Element ausgehen, liegen dann in einer Röhre, die entweder ins Unendliche verläuft oder auf einem anderen Leiter mündet. Wir nehmen jetzt einen zweiten Leiter vor, und teilen die Flächenabschnitte, auf denen noch keine Verschiebungsröhren enden, wieder in Elemente ein, von denen aus wir in analoger

Weise Röhren konstruieren, usf., bis alle Leiter eingeteilt sind. Der ganze Raum ist also jetzt in Röhren aufgeteilt, und alle Leiter in Elemente. Die Ladung der Leiter teilen wir entsprechend den Flächenelementen in Ladungselemente $e_{\nu 1} + e_{\nu 2} + \cdots$ Die obenstehende Energiesumme wird $\frac{1}{2} \Sigma (e_{\nu 1} + e_{\nu 2} + \cdots) \Phi_\nu$, und wir wollen sie auswerten, indem wir die einzelnen Glieder in anderer Weise zusammenfassen. Wir wollen je zwei Elemente zusammennehmen, die durch eine Röhre verbunden sind, und getrennt davon diejenigen, deren Verschiebungsröhren ins Unendliche verlaufen. Zwei durch eine Röhre verbundene Elemente tragen entgegengesetzt gleiche Ladung; sie liefern zur Gesamtenergie einen Beitrag $\frac{1}{2} e_k (\Phi_k - \Phi_l)$, und es ist das Vernünftigste, diese Energie als über die ganze, die Elemente verbindende Röhre verteilt anzunehmen. Ebenso liefert eine Röhre, die ins Unendliche verläuft, den Beitrag $\frac{1}{2} e_k \Phi_k$. Die gleiche Energiesumme erhalten wir nun, wenn wir im ganzen Raum jedem Volumelement die Energie $\frac{1}{2} (\mathrm{E} \cdot \mathrm{D})$ zuschreiben. In der betrachteten Verschiebungsröhre ist dann die Energie $\int_k^l \frac{1}{2} (\mathrm{E} \cdot \mathrm{D})\, d\,S$ aufgespeichert. Die Röhre selbst teilen wir nun wieder in Elemente auf, und zwar durch Flächen vom Querschnitt ω, die senkrecht zu den Kraftlinien liegen. Ist $d\,s$ die Länge eines Kraftlinienelementes, so ist das Volumen $d\,S = \omega\, d\,s$, und überall in der Röhre ist $\omega\, \mathrm{D} = e_k$. Jedes Element, das einen Knick enthält, sondern wir aus, wodurch an der Gesamtsumme nur unendlich wenig geändert wird. Falls nur ein Knick vorhanden ist (die Überlegung ist bei mehreren Unstetigkeitsflächen genau die gleiche), erhalten wir:

$$\int_k^l \tfrac{1}{2} (\mathrm{E} \cdot \mathrm{D})\, d\,S = -\tfrac{1}{2} e_k \cdot \int_k^l \frac{\partial \Phi}{\partial s}\, d\,s = -\tfrac{1}{2} e_k \cdot (\Phi_l - \Phi_{II} + \Phi_I - \Phi_k),$$

wobei Φ_I und Φ_{II} die Potentialwerte zu beiden Seiten einer Unstetigkeitsfläche bedeuten. Φ_I und Φ_{II} sind aber wegen der Bedingung der Stetigkeit von Φ gleich, so daß der oben stehende Ausdruck in $\frac{1}{2} e_k (\Phi_l - \Phi_k)$ übergeht. Auf die gleiche Weise finden wir für die Energie einer Röhre, die vom Leiter k nach dem Unendlichen verläuft, den Ausdruck $\frac{1}{2} e_k \Phi_k$. Dadurch ist bewiesen, daß wir den richtigen Ausdruck für die Feldenergie erhalten, wenn wir für jedes Volumenelement den Betrag $\frac{1}{2} (\mathrm{E} \cdot \mathrm{D})$ einsetzen.

§ 9. Die dielektrische Anziehung.

Aus unseren Überlegungen läßt sich auch ableiten, daß ein Körper aus einem dielektrischen Material, dessen Dielektrizitätskonstante sich von der der Umgebung unterscheidet, Kräften unterworfen ist. Diese Kräfte, die man dielektrische Anziehung nennt, sind bereits vor vielen Jahren durch Boltzmann experimentell untersucht worden, und Boltzmann bestimmte aus ihnen Dielektrizitätskonstanten. Denken wir uns eine geladene, metallische Kugel, und in der Nähe eine Schwefelkugel, beide in Luft. Zunächst läßt sich durch eine einfache Überlegung zeigen, daß zwischen beiden Kugeln eine Anziehung stattfinden muß. Dazu hat man nur nachzuweisen, daß die Gesamtenergie im Feld kleiner wird, wenn z. B. die Schwefelkugel ein wenig gegen die metallische hin verschoben wird. Die Anwesenheit der Schwefelkugel ruft nun eine Veränderung im Verlauf der Kraftlinien hervor in dem Sinne, daß mehr Kraftlinien durch die Schwefelkugel verlaufen als durch den gleichen Raum ohne ihre Anwesenheit verlaufen würden; denn die Dielektrizitätskonstante von Schwefel ist größer als die von Luft. Statt dessen läßt sich auch sagen, die dielektrische Spannung, die sich einer Elektrizitätsbewegung widersetzt, wird kleiner, wenn man die Schwefelkugel in den Raum einführt, und die Anzahl der Verschiebungslinien wird somit größer. Der Einfluß der Schwefelkugel muß um so größer sein, je näher sie an die Metallkugel gebracht wird, und wir haben nun zu untersuchen, in welchem Sinn die im Feld aufgespeicherte Energie durch ihr Vorhandensein geändert wird. Die Feldenergie muß nun kleiner werden, denn wenn wir der Metallkugel eine bestimmte Ladung erteilen wollen, einmal wenn die Schwefelkugel fortgenommen ist und ein anderes Mal, wenn sie vorhanden ist, so werden wir im zweiten Fall weniger Arbeit zu leisten haben als im ersten, da eben die dielektrische Spannung, die sich der Entstehung des gewünschten Feldzustandes widersetzt, kleiner ist. Die Schwefelkugel ruft also eine Abnahme der Feldenergie hervor, und diese Abnahme ist um so größer, je näher wir den Schwefel an die Metallkugel heranbringen. Es folgt also, daß eine Anziehung stattfinden muß.

Boltzmann verglich die Größe dieser Anziehung mit derjenigen, die eine an derselben Stelle befindliche ungeladene, isolierte Metallkugel erfahren würde. Es zeigt sich, daß das Verhältnis der Anziehungen von der Dielektrizitätskonstante des Schwefels abhängig ist.

Die Gesamtenergie ist $\Sigma \frac{1}{2} e \Phi$, und da nur der erste Leiter eine Ladung besitzt, hat man allein zu bestimmen, wie das Potential Φ dieses Leiters durch die Anwesenheit der zweiten Metallkugel bzw. der Schwefelkugel geändert wird. Wir wollen annehmen, daß der Abstand b der Kugeln groß im Vergleich zu ihren Radien sei und müssen dann untersuchen, welchen Einfluß die Anwesenheit der Kugeln auf das elektrische Feld ausübt, das wir als homogen ansehen können. Für die Metallkugel folgt dies aus den Überlegungen von S. 91. Wir fanden dort für das Potential in einem beliebigen Punkt:

$$\Phi = C - E_0 x + E_0 \frac{a^3 x}{r^3} .$$

Es ist klar, daß der letzte Summand dieses Ausdruckes den Einfluß der Metallkugel wiedergibt.

Um das Feld zu finden, das bei Anwesenheit der Schwefelkugel herrscht, versuchen wir, auch hier eine analoge Lösung anzusetzen, so daß außerhalb der Schwefelkugel gelten soll

$$\Phi = C - E_0 x + \alpha \frac{x}{r^3} .$$

Innerhalb der Kugel ist ein Term mit $\frac{x}{r^3}$ natürlich nicht möglich, da dieser Term im Mittelpunkt unendlich groß werden würde. Wir setzen darum für das Innere der Schwefelkugel an

$$\Phi_1 = C_1 - A_1 x,$$

d. h. wir denken uns das Feld im Inneren homogen. Nun muß zunächst Φ an der Oberfläche stetig sein, also muß für jedes x gelten

$$C - E_0 x + \alpha \frac{x}{a^3} = C_1 - A_1 x,$$

daraus folgt

$$C_1 = C, \; A_1 = E_0 - \frac{\alpha}{a^3} .$$

Ferner ist die Normalkomponente von D an der Oberfläche stetig. Hieraus folgt für die Oberfläche außerhalb der Schwefelkugel

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{r=a} = E_0 \cos(r, x) + \frac{2 \alpha \cos(r, x)}{a^3}$$

und im Innern der Kugel, falls ε die Dielektrizitätskonstante von Schwefel ist

$$-\varepsilon\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right)_{r=a} = \varepsilon A_1 \cos(r, x).$$

Die Stetigkeitsbedingung verlangt also

$$E_0 + \frac{2\alpha}{a^3} = \varepsilon\left(E_0 - \frac{\alpha}{a^3}\right),$$

und somit wird:

$$\alpha = E_0 a^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}.$$

Im Zusammenhang mit dem Vorigen folgt nun, daß die Kraft, mit der die Schwefelkugel angezogen wird, $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ mal so groß ist wie die Kraft, die auf eine Metallkugel wirkt.

BOLTZMANN bestimmte diese anziehende Kraft mit Hilfe einer Drehwage und leitete daraus die spezifische Induktion von Schwefel und anderen Stoffen ab. Bei diesen Versuchen ergibt sich aber eine Schwierigkeit. Es bildet sich nämlich leicht, sei es durch Verunreinigung, sei es durch Feuchtigkeit, rings um die Kugel eine schwach leitende Schicht aus. Bei Beginn des Versuches, wenn die Metallkugel geladen wird, werden nun die Kraftlinien durch die Schwefelkugel und durch die schlecht leitende Oberflächenschicht ungefähr so verlaufen, wie es in der Fig. 13 für eine Kraftlinie $A\,D\,B$ gezeichnet ist. Dabei nimmt das Potential längs einer Kraftlinie ab, in B herrscht ein tieferes Potential als in A; der Potentialabfall nun hat aber einen kleinen Strom zur Folge, der in der Richtung $A\,C\,B$ durch die leitende Oberflächenschicht kriecht, und der mit der Zeit den Potentialunterschied auszugleichen sucht. Durch diese kleinen Kriechströme, die natürlich überall längs der Kugeloberfläche laufen, entsteht ein Zustand, als ob wir es mit einer leitenden Hohlkugel zu tun hätten, auf die die geladene Kugel induzierend wirkt.

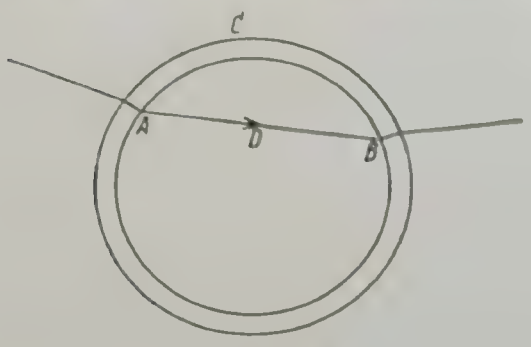

Fig. 13.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, verwandte Boltzmann den Kunstgriff, das Vorzeichen der Ladung auf der geladenen Kugel dauernd zu wechseln; dadurch haben die soeben besprochenen Kriechströme keine Zeit sich auszubilden und wirksam zu werden.

§ 10. Beliebige Systeme von Leitern.

Wir wollen jetzt noch irgendein System von n Leitern betrachten, die sich in ganz beliebigen Dielektriken befinden. Unsere Aufgabe soll sein, die Ladungen zu bestimmen, falls die Potentiale der Leiter gegeben sind, und umgekehrt die Potentiale aus den Ladungen zu berechnen. Jedes dieser beiden Probleme l ßt sich mit Hilfe des auf S. 79 besprochenen Superpositionsprinzipes auf n einfachere Aufgaben zurückführen, die wir nun näher betrachten wollen.

Ein möglicher Zustand des Systems sei bestimmt durch die Potentialwerte Φ' in jedem Punkt, ein zweiter Zustand sei gegeben durch die Potentiale Φ''. Im ersten Zustand sind in einem beliebigen Punkt die Komponenten der elektrischen Kraft

$$\mathrm{E}_x' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \quad \mathrm{E}_y' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial y}, \quad \mathrm{E}_z' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial z}$$

und die dielektrische Verschiebung ist gegeben durch $\mathrm{D}' = \varepsilon\,\mathrm{E}'$, (für ein anisotropes Medium muß die letzte Gleichung durch die Gleichung 18′ auf S. 64 ersetzt werden). Ebenso gilt für den zweiten Zustand

$$\mathrm{E}_x'' = -\frac{\partial \Phi''}{\partial x}, \quad \mathrm{E}_y'' = -\frac{\partial \Phi''}{\partial y}, \quad \mathrm{E}_z'' = -\frac{\partial \Phi''}{\partial z} \quad \text{und} \quad \mathrm{D}'' = \varepsilon\,\mathrm{E}''.$$

Nun ergibt sich ebenfalls ein möglicher Zustand des Systems, wenn wir für das Potential setzen $\Phi = \Phi' + \Phi''$, wobei die elektrische Kraft gegeben ist durch $\mathrm{E}_x = -\partial\Phi/\partial x$, $\mathrm{E}_y = -\partial\Phi/\partial y$, $\mathrm{E}_z = -\partial\Phi/\partial z$, also $\mathrm{E} = \mathrm{E}' + \mathrm{E}''$, und die dielektrische Verschiebung durch $\mathrm{D} = \varepsilon\,\mathrm{E}$, also $\mathrm{D} = \mathrm{D}' + \mathrm{D}''$. Man kann leicht einsehen, daß diese letztere Beziehung auch für ein anisotropes Medium Gültigkeit behält. Denn das so bestimmte Φ ist an der Oberfläche eines jeden Leiters konstant, da Φ' und Φ'' dort auch konstant sind, ferner ist überall $\mathrm{div}\,\mathrm{D} = 0$, da $\mathrm{div}\,\mathrm{D}' = 0$ und $\mathrm{div}\,\mathrm{D}'' = 0$ ist, während an jeder Unstetigkeitsfläche die Tangentialkomponente von E und die Normalkomponente von D stetig sind, weil ja dasselbe für E′ und E″ bzw. für D′ und D″ gilt.

Im neuen Zustand finden wir für die Ladung eines Leiters, den wir mit dem Index k bezeichnen wollen,

$$e_k = \int D_n \, d\sigma_k = \int (D_n' + D_n'') \, d\sigma_k = e_k' + e_k'';$$

wir haben also auch die Ladungen der gegebenen Zustände einfach zu addieren.

Nachdem wir dies alles für zwei Zustände bewiesen haben, können wir ohne weiteres auf mehrere übergehen. Einen Spezialfall bildet noch die Superposition einiger ganz gleicher Zustände, was einfach so zu behandeln ist, daß man überall die Größen Φ usf. mit einem bestimmten Faktor multipliziert.

Wir können die Ladungen $e_1, e_2, \ldots e_n$ bestimmen, die bei gegebenen Potentialen $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_n$ vorhanden sind, wenn wir die folgenden n einfacheren Probleme gelöst haben.

Die Ladungen sind zu bestimmen, wenn die gegebenen Potentialwerte sind:	Die Lösung ergebe die Ladungen:
1, 0, 0 . . . 0	$p_{11}, p_{21}, p_{31} \cdots p_{n1}$
0, 1, 0 . . . 0	$p_{12}, p_{22}, p_{32} \cdots p_{n2}$
. . . . .	. . . . .
0, 0, 0 . . . 1	$p_{1n}, p_{2n}, p_{3n} \cdots p_{nn}$

Nach dem Obenstehenden gilt dann allgemein:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= p_{11}\,\Phi_1 + p_{12}\,\Phi_2 + \ldots p_{1n}\,\Phi_n \\ e_2 &= p_{21}\,\Phi_1 + p_{22}\,\Phi_2 + \ldots p_{2n}\,\Phi_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= p_{n1}\,\Phi_1 + p_{n2}\,\Phi_2 + \ldots p_{nn}\,\Phi_n \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Aus diesen linearen Gleichungen lassen sich auch die Potentiale, ausgedrückt in Ladungen, angeben,

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= q_{11}\,e_1 + q_{12}\,e_2 + q_{13}\,e_3 + \ldots q_{1n}\,e_n \\ \Phi_2 &= q_{21}\,e_1 + q_{22}\,e_2 + q_{23}\,e_3 + \ldots q_{2n}\,e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n &= q_{n1}\,e_1 + q_{n2}\,e_2 + q_{n3}\,e_3 + \ldots q_{nn}\,e_n \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Die Koeffizienten q haben eine analoge Bedeutung wie die p, so z. B. bedeutet q_{1k} das Potential, das der erste Leiter besitzt, wenn der k^{te} Leiter die Ladung 1 und alle anderen die Ladung 0 besitzen.

Eine wichtige Beziehung zwischen diesen Koeffizienten folgt aus der Betrachtung der Energie. Für die gesamte Energie des Feldes finden wir:

$$A = \Sigma \tfrac{1}{2} e \Phi = \tfrac{1}{2} \{q_{11} e_1^2 + q_{22} e_2^2 + \cdots + q_{nn} e_n^2 + \\ + (q_{12} + q_{21}) e_1 e_2 + (q_{13} + q_{31}) e_1 e_3 + \cdots + (q_{n-1,n} + q_{n,n-1}) e_{n-1} e_n\}.$$

Nach unseren früheren Überlegungen hat man, um eine Ladung $d e_k$ vom Unendlichen auf den k^{ten} Leiter zu bringen, eine Arbeit $\Phi_k \, d e_k$ zu leisten, und diese muß der Energieänderung im Feld $\frac{\partial A}{\partial e_k} d e_k$ gleich sein. Wir erhalten also

$$\frac{\partial A}{\partial e_k} = \Phi_k,$$

und daraus, wenn wir $\frac{\partial A}{\partial e_k}$ in der obigen Gleichung bilden und Φ_k aus Gleichung (17) einsetzen:

$$\tfrac{1}{2}(q_{1k} + q_{k1}) e_1 + \tfrac{1}{2}(q_{2k} + q_{k2}) e_2 + \cdots + q_{kk} e_k + \cdots + \tfrac{1}{2}(q_{nk} + q_{kn}) e_n = \\ = q_{k1} e_1 + q_{k2} e_2 + \cdots + q_{kn} e_n.$$

Da diese Beziehung unabhängig von den Ladungen der Leiter $e_1, e_2, \ldots e_n$ gelten muß, so folgt allgemein:

$$q_{kh} = q_{hk}.$$

Dies ist der mathematische Ausdruck für eine sehr hübsche Wechselbeziehung, die sich so in Worten fassen läßt:

Fassen wir aus einem willkürlichen System von Leitern, umgeben von beliebigen Dielektrika, zwei Leiter A und B ins Auge, so ist das Potential, das B annimmt, wenn allein der Leiter A geladen wird, dasselbe wie das Potential, das A annimmt, wenn unter allen Leitern nur B, und zwar mit derselben Elektrizitätsmenge wie vorher A, geladen ist.

Wenn wir in Gleichung (17) die Größen e eliminieren, so werden die p durch die q ausgedrückt; es läßt sich jetzt sehr leicht zeigen, daß dann aus der obenstehenden Gleichung folgt:

$$p_{kh} = p_{hk},$$

in Worten: die Ladung, die auf einem Leiter B sitzt, wenn alle Leiter mit der Erde verbunden sind außer A, das auf ein bestimmtes Potential gebracht wird, ist gleich der Ladung, die A erhält, wenn alle Leiter geerdet werden außer B, und B mit der gleichen Spannungsquelle verbunden wird wie vorher A.

§ 11. Die Ladung auf einem Isolator.

Einen Punkt müssen wir noch berühren, den wir bisher ganz vernachlässigt haben und der doch eine der am längsten bekannten elektrostatischen Erscheinungen betrifft; es ist das Vorkommen von Ladungen auf Nichtleitern. Wir wollen uns hier nicht bemühen, uns eine Vorstellung vom Entstehen solcher Ladungen zu machen. Wir wollen vielmehr an einem Beispiel zeigen, wie unsere Gleichungen modifiziert werden müssen, um der Anwesenheit solcher Ladungen Rechnung zu tragen. Dazu läßt sich wieder gut das Bild benützen, das die Elektrizität in Analogie zu einer inkompressiblen Flüssigkeit setzt. An der Oberfläche z. B. einer Glasplatte denken wir uns eine positive Ladung mit der Oberflächendichte σ. Wenn sich keine anderen Ladungen im Feld befinden, so wird die Ladung Veranlassung zu einer dielektrischen Verschiebung sowohl im Glas als auch in der Luft geben, und zwar beide Male von der Fläche fortgerichtet, auf der sich die betrachtete Ladung befindet. Die auf der betrachteten Fläche befindliche Elektrizität trachtet nämlich, nach beiden Seiten einen Ausweg zu finden. War schon vorher ein elektrisches Feld vorhanden, so läßt sich die Modifizierung am einfachsten beschreiben, wenn man **zuerst auf die dielektrische Verschiebung achtet.**

Um die Gleichung hierfür aufzufinden, müssen wir die gleiche Überlegung anstellen, die uns bei Abwesenheit der Ladung dazu führt, an der Oberfläche der Glasplatte die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung stetig anzunehmen. Wir betrachten also ein zylindrisches Raumelement, in dem Grund- und Deckfläche der Oberfläche der Glasplatte parallel sind und zu ihren beiden Seiten liegen und dessen Höhe klein im Vergleich zu den Abmessungen der Grund- und Deckfläche ist. Ist nun $d\,S$ das aus der Glasoberfläche von dem Zylinder ausgeschnittene Stück, so sitzt in dem Zylinder irgendwie verteilt eine Elektrizitätsmenge $\sigma\,d\,S$. Wegen der Inkompressibilität muß nun durch den Verschiebungsstrom eine gleich große Menge abgeflossen sein. Dies führt zu der Gleichung:

$$(\mathsf{D}_n)_I - (\mathsf{D}_n)_{II} = \sigma,$$

wenn wir die Normale n von der Seite II nach der Seite I ziehen.

Drittes Kapitel.

Stationäre Ströme.

§ 1. Einleitung.

Stationäre Ströme können allein in Leitern bestehen, denn in einem Dielektrikum würden sie zu einer unendlich großen dielektrischen Verschiebung Anlaß geben. Um in einem Leiter einen stationären Strom zu unterhalten, ist eine stationäre, treibende Kraft notwendig. Ein solcher Strom kann also nicht als Folge einer Änderung des magnetischen Feldes auftreten, denn wäre das der Fall, so müßte $-d/dt \int B_n \, d\sigma$, erstreckt über eine beliebige Fläche, deren Begrenzung der Stromkreis bildet, einen konstanten Wert haben. Dann aber müßte $\int B_n \, d\sigma$ mit der Zeit unendlich anwachsen, ein Fall, den wir ausschließen können. Wir werden also die magnetische Induktion (und damit auch die magnetische Kraft) als zeitlich konstant ansehen.

Außer den elektrischen Kräften, von denen bisher die Rede war, gibt es nun noch andere Kräfte, die die Elektrizität zum Strömen veranlassen können. Wir wollen sie elektromotorische Kräfte nennen und sie durch das Zeichen E_e einführen. Der Vektor E_e bedeutet dann die Kraft, die auf die Einheit der Elektrizität wirkt.

In isotropen Leitern können wir setzen

$$C = \frac{1}{\varrho} \cdot (E + E_e).$$

Der Koeffizient ϱ ist das Maß für den spezifischen Widerstand des Leiters, $\frac{1}{\varrho}$ das für das spezifische Leitvermögen.

Auch bei Vorhandensein einer elektromotorischen Kraft ist es möglich, daß kein dauernder Strom durch einen Leiter fließt, dann nämlich, wenn die elektrische und die elektromotorische Kraft sich überall gerade aufheben, d. h. wenn $E = -E_e$ ist. Da für jede ge-

schlossene Kurve $\int E_s \, ds = 0$ ist, so muß in diesem Fall auch $\int E_{es} \, ds = 0$ sein. Aus der letzten Gleichung folgt, daß dann die elektromotorische Kraft an einer Stelle des Stromkreises der an einer anderen gerade entgegenwirkt. Immer, wenn diese Bedingung erfüllt ist, wird also die elektromotorische Kraft kein kreisförmiges Umlaufen der Elektrizität bewirken. Sie kann aber wohl eine Anhäufung von Ladungen hervorrufen, und dieses Anhäufen erfolgt so lange, bis die bei Vorhandensein von Ladungen in Erscheinung tretende elektrische Kraft, die von einem Potential Φ abhängt, entgegengesetzt gleich E_e ist. Die schließlich erreichten Potentialunterschiede genügen also der Bedingung, daß für jede beliebige Richtung h die Gleichung $\partial \Phi / \partial h = -E_{eh}$ gilt. Daraus folgt für zwei beliebige Punkte A und B im Leiter die Beziehung

$$\Phi_B - \Phi_A = \int_A^B E_{es} \, ds.$$

Solche Potentialdifferenzen entstehen, wenn zwei Metalle einander berühren. Man hat sich vorzustellen, daß in der unmittelbaren Nähe der Berührungsfläche elektromotorische Kräfte wirksam sind, und zwar in der Weise, daß das Linienintegral von E_{es} für jede geschlossene Kurve verschwindet, aber für eine Kurve, die einen Punkt A des einen Metalls mit einem Punkt B des anderen verbindet, einen bestimmten Wert hat; dieser ist allein von der Art der Metalle abhängig und gibt die Potentialdifferenz zwischen A und B an.

Thermodynamische Überlegungen führen zu der Behauptung, die durch Beobachtungen bestätigt wird, daß solange die Temperatur überall konstant bleibt, die Potentialdifferenz zwischen zwei Metallen die gleiche ist, unabhängig davon, ob man zwischen sie noch andere Metalle einschaltet oder nicht. Hieraus folgt dann wieder, daß zwischen den Enden einer Kette von Metallen keine Potentialdifferenz auftritt, falls diese Enden aus demselben Material bestehen. Liegt in der Reihe jedoch ein Elektrolyt, so ändern sich die Verhältnisse, und hierauf beruht die Wirkung eines galvanischen Elementes.

Die oben betrachteten Gleichgewichtszustände für stromlose Zustände sind nur möglich, wenn für jede geschlossene Kurve $\int E_{es} \, ds = 0$ ist. Sobald das Integral von Null verschieden ist, muß notwendig Elektrizität fließen. Ist z. B. eine Metallplatte in Berührung mit einem Elektrolyten, so sind Inhomogenitäten in der Metallober-

fläche fast unvermeidlich. Dann aber lassen sich stets kleine, geschlossene Kurven ziehen, die die Grenzfläche in zwei Punkten P und Q schneiden, und bei denen die Elektrizität in P und Q in ungleichem Maße von einem Leiter zum anderen getrieben wird. Längs einer solchen Kurve besitzt das Integral einen von Null verschiedenen Wert. Hieraus erklären sich die kleinen Kreisströme (die sogenannten Lokalströme), die an den Platten von galvanischen Elementen auftreten.

§ 2. Das Ohmsche Gesetz.

Denken wir uns jetzt einen drahtförmigen Leiter, in dem eine elektromotorische Kraft wirksam ist, und zunächst den Stromkreis nicht geschlossen, an den beiden Enden möge sich das gleiche Metall befinden. War in einem bestimmten Augenblick das Potential längs des Drahtes konstant, so muß E überall Null sein, also ist $E - E_s$ nicht überall Null, und es entsteht ein Strom. Dieser bringt eine Potentialdifferenz zustande, die anwächst, bis Gleichgewicht mit der elektromotorischen Kraft hergestellt ist, und dann hört der Strom zu fließen auf. In den homogenen Teilen des Leitungsdrahtes ist nun überall das Potential konstant, aber an den Kontaktstellen, an denen elektromotorische Kräfte auftreten, gilt für ein beliebiges Kurvenstück, das zwei Punkte A und B zu beiden Seiten der Kontaktstelle verbindet

$$\Phi_B - \Phi_A = \int_A^B E_{es}\, ds. \tag{1}$$

Da man die Punkte A und B sehr nahe aneinanderliegend denken kann, spricht man im allgemeinen von einem Potentialsprung. Man kann sagen: der Potentialunterschied zwischen den Enden der Drähte ist gleich der Summe der Potentialsprünge an den Kontaktstellen. Diese Summe ist gleich $\int E_{es}\, ds$, erstreckt über den ganzen Draht, und den Integralwert pflegt man die gesamte elektromotorische Kraft der Kette zu nennen.

Jetzt wollen wir den Stromkreis schließen.

Es wird ein Strom entstehen, und in jedem Punkt des Drahtes wird gelten, falls s die Richtung längs des Drahtes bedeutet,

$$C_s = \frac{1}{\varrho}(E_s + E_{es}).$$

Nennen wir den Querschnitt des Drahtes an irgendeiner Stelle ω, so ist die Stromstärke i, d. h. die Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch diesen Querschnitt fließt, gleich $C_s \omega$, und diese Größe ist wegen der Inkompressibilität der Elektrizität (wegen des solenoidalen Charakters von C), längs des Drahtes konstant. Die obenstehende Gleichung ergibt also:

$$\frac{i\varrho}{\omega} = E_s + E_{es}. \tag{2}$$

In Gleichung (2) läßt sich E_s eliminieren, wenn man längs des ganzen Drahtes integriert. Denn das Linienintegral der elektrischen Kraft längs jeder geschlossenen Kurve ist gleich Null. Wir erhalten also

$$i \int \frac{\varrho}{\omega} d s = \int E_{es} d s. \tag{3}$$

Diese Gleichung drückt das Ohmsche Gesetz aus. In Übereinstimmung mit dem obenstehenden nennen wir das Integral auf der rechten Seite der Gleichung die gesamte elektromotorische Kraft des Stromkreises und wollen sie mit dem Buchstaben F bezeichnen. Das Integral auf der linken Seite wird Widerstand genannt; dieser hängt allein von den Eigenschaften und Dimensionen des Leiters ab; wir wollen ihn mit r bezeichnen. Unsere Gleichung wird also

$$F = i r. \tag{4}$$

Unter der elektromotorischen Kraft in einem Teil des Kreises, z. B. zwischen den Punkten A und B, verstehen wir den Ausdruck $\int_A^B E_{es} d s$, wir wollen für ihn F_{AB} schreiben. Ebenso sprechen wir von dem Widerstand in dem Stück $A B$

$$r_{AB} = \int_A^B \frac{\varrho}{\omega} d s.$$

Aus Gleichung (2) folgt dann weiter durch Integration zwischen den Punkten A und B

$$i r_{AB} = \int_A^B E_s d s + F_{AB}$$

und hieraus

$$F_{AB} - i r_{AB} = \Phi_B - \Phi_A. \tag{5}$$

Im Fall der Stromlosigkeit erhält man aus Gleichung (5) wieder Gleichung (1). Ferner läßt sich aus Gleichung (5) leicht die bekannte Tatsache ableiten, daß bei einem galvanischen Element die Potentialdifferenz zwischen den Polen geringer wird, wenn durch Anbringen eines Schließungsdrahtes der Strom i von Null bis zu irgendeinem Wert ansteigt. Für einen Teil des Drahtes, in dem keine elektromotorischen Kräfte wirksam sind, geht die obige Gleichung über in

$$i\,r_{AB} = \Phi_A - \Phi_B. \tag{6}$$

Diese Potentialdifferenzen haben eine wichtige physikalische Bedeutung. Sie sorgen dafür, daß überall im Kreis eine Elektrizitätsbewegung entsteht. Denn die elektromotorischen Kräfte wirken nur an einzelnen Stellen, den Kontaktstellen, und treiben dort die Elektrizität von einem Leiter zum anderen. Hierdurch entstehen die bereits besprochenen Potentialsprünge. Diese sind wieder der Grund zu einem Potentialgefalle, also zu einer elektrischen Kraft in den Verbindungsdrähten, und so entsteht der elektrische Strom, der die Potentialdifferenzen auszugleichen sucht. Daß an den Kontaktstellen hingegen der Strom von Stellen niederen zu solchen höheren Potentials fließt, hat natürlich seinen Grund in den elektromotorischen Kräften. Wenn an diesen Kontaktstellen nun die Elektrizitätsbewegung nicht sehr groß wird, sondern die ganze Erscheinung allmählich verläuft, so hängt das wieder mit der aus den Potentialdifferenzen resultierenden elektrischen Kraft zusammen, die die elektromotorische teilweise kompensiert.

Wir können uns ein Bild von dem elektrischen Strom machen, wenn wir uns eine inkompressible Flüssigkeit in einer geschlossenen Röhre mit elastischen Wänden denken, und annehmen, an einer Stelle der Röhre sei durch irgendeine Ursache, die mit der elektromotorischen Kraft korrespondiert, eine Bewegung der Flüssigkeit in einer bestimmten Richtung hervorgerufen. In der Nähe dieser Stelle in Richtung der Bewegung wird die Flüssigkeit die Röhrenwandung nach außen durchbiegen, so daß eine Ausbuchtung entsteht. Ihr entspricht im elektrischen Fall eine Aufladung des Drahtes, wovon noch später die Rede sein wird. An der entgegengesetzten Röhrenseite, von der betrachteten Stelle aus gesehen, wird sich umgekehrt eine Einbuchtung zeigen. Die elastischen Kräfte der Wandung, die sich der Aus- bzw. Einbuchtung widersetzen, entsprechen der dielek-

trischen Spannung des Mediums. Die elastischen Kräfte bedingen an den einzelnen Stellen der Röhre einen Druck, und die Druckunterschiede liefern die Kraft, die die Flüssigkeit forttreibt; in den elektrischen Stromkreisen korrespondiert hiermit eine Potentialdifferenz, deren Entstehung in analoger Weise der dielektrischen Spannkraft zugeschrieben werden kann.

§ 8. Das elektrische Feld um einen Stromleiter.

Wenn die elektromotorischen Kräfte und der Widerstand überall im Stromkreis gegeben sind, so läßt sich mit Hilfe des vorigen zunächst die Größe der Stromstärke ableiten, nachdem der Strom stationär geworden ist, und ferner läßt sich der Potentialunterschied zwischen irgend zwei Punkten bestimmen. Das Potential selbst in jedem Punkt bleibt aber unbestimmt. Dies ist auch ohne weiteres verständlich, denn ohne an den elektromotorischen Kräften, dem Widerstand oder dem Stromverlauf irgend etwas zu ändern, kann man dem ganzen System eine Ladung erteilen, wodurch das Potential überall um einen bestimmten Betrag geändert wird. Ist aber die Ladung des ganzen Systems als Null vorgegeben, so läßt sich auf die folgende Weise das Potential eines jeden Punktes bestimmen. Wir nennen Φ_1 das Potential irgendeines Punktes Q und können damit das Potential eines jeden anderen Punktes im Stromkreis als Funktion von Φ_1 angeben. Weiter läßt sich — abgesehen von mathematischen Schwierigkeiten — mit Hilfe der Überlegungen aus dem vorigen Kapitel das Potential in jedem Punkt des umgebenden Feldes ableiten: man hat dabei nur zu beachten, daß unser Stromkreis ein Leiter ist, an dessen Oberfläche das Potential nicht überall konstant ist; da es aber in jedem Punkt gegeben ist, so genügt das nach den auf S. 31 und 32 besprochenen Sätzen. Man kann nun weiter die elektrische Kraft und die dielektrische Verschiebung aufschreiben und erhält daraus den Ausdruck für die Ladung. Setzen wir die Ladung gleich Null, so erhalten wir eine Gleichung, aus der Φ_1 bestimmt werden kann.

Im folgenden wollen wir nun, um Φ_1 zu berechnen, Φ_1 durch zwei Größen ausdrücken, die eine einfache physikalische Bedeutung haben. Denken wir uns zunächst einen Versuch, bei dem an dem ganzen Stromkreis nichts weiter verändert wird, als daß der Punkt Q mit der Erde verbunden, sein Potential also gleich Null

gemacht wird. Der jetzt entstehende Zustand ist vollständig bestimmt, der Leitungsdraht besitzt eine gewisse Ladung e_1, die sich wie oben angegeben berechnen läßt. Weiter denken wir uns einen zweiten Versuch, bei dem keine elektromotorischen Kräfte wirksam sind, im übrigen aber das ganze System unverändert bleibt; das System ist also isoliert und wir denken es uns auf das Potential 1 aufgeladen. Die Ladung, die es jetzt erhält (seine Kapazität), nennen wir C. Bei einem Potential Φ_1 ist demnach die Ladung $C\,\Phi_1$. Der in Wirklichkeit vorhandene Fall läßt sich nun durch Superposition von dem Zustand errechnen, bei dem der Strom fließt und Q zur Erde abgeleitet ist, und dem stromlosen Zustand, bei welchem überall das Potential Φ_1 herrscht. Im ersten Fall sind die Potentialdifferenzen bereits die richtigen, wie sie sein müssen, nur ist das Potential von Q gleich Null, durch Superposition des zweiten Zustandes werden alle Potentiale um Φ_1 erhöht. Die Ladung im wirklichen Zustand beträgt $e_1 + C\,\Phi_1$ und somit wird

$$e_1 + C\,\Phi_1 = 0$$

hieraus folgt

$$\Phi_1 = -\frac{e_1}{C}.$$

Wenn auch die Gesamtladung Null ist, so kann in besonderen Fällen die Ladungsdichte an den verschiedenen Punkten des Leiters doch beträchtlich groß sein; dies trifft z. B. bei transatlantischen Kabeln zu, wo durch die Kondensatorwirkung die Ladungsdichte erhöht wird. (Man kann nämlich den Leitungsdraht und das Seewasser als Innen- und Außenbelegungen eines zylindrischen Kondensators betrachten. Die Übereinstimmung mit dem elektrostatischen Fall wird noch dadurch günstiger, daß das Potential längs des Drahtes sich nur langsam ändert.)

Ein wesentlicher Unterschied besteht zwischen dem Feld rings um einen Draht, in dem ein stationärer Strom fließt, und einem gewöhnlichen elektrostatischen Feld. Im ersteren Fall stehen nämlich die elektrischen Kraftlinien nicht senkrecht auf der Oberfläche des Leiters, da dieser keine Äquipotentialfläche darstellt. Aus dem gleichen Umstand folgt, daß jetzt Kraftlinien von einem Punkt eines Leiters nach einem anderen Punkt desselben Leiters laufen können, was in der Elektrostatik nicht möglich ist. Es lassen

sich sogar Fälle angeben, bei dem Kraftlinien, die von einem Teil eines Leiters ausgehen, ausschließlich nach anderen Teilen des gleichen Leiters laufen; dies trifft z. B. für eine Spule zu, bei der mehrere Lagen Drahtwindungen übereinander liegen. Kraftlinien, die von der innersten Lage ausgehen, müssen nach anderen Teilen der Spule laufen, und werden in der Hauptsache auf der darauffolgenden Lage endigen. Auch bei solchen Spulen können große Ladungen auftreten, da die verschiedenen Lagen wie Kondensatorplatten wirken.

§ 4. Die Kirchhoffschen Gesetze.

Wir betrachten ein beliebiges Netz drahtförmiger Leiter, in einigen von ihnen mögen elektromotorische Kräfte wirksam sein; wir fragen, welche Stromverteilung in den einzelnen Drähten besteht. Hierüber geben die Kirchhoffschen Gesetze Aufschluß, die sich leicht aus unseren allgemeinen Gleichungen ableiten lassen. Das erste folgt aus der Inkompressibilität der Elektrizität und sagt aus, daß in jedem Verzweigungspunkt gleich viel Elektrizität zu- wie abströmt; nennen wir in jedem Stromzweig den auf den betrachteten Punkt hinfließenden Strom i, so heißt der Satz in einer Formel ausgedrückt: $\Sigma i = 0$. Das zweite Kirchhoffsche Gesetz folgt aus dem Satz, daß das Linienintegral der elektrischen Kraft über eine geschlossene Kurve verschwindet; als geschlossene Kurve wählen wir irgendeinen Kreis von Leitungsdrähten und setzen eine bestimmte Stromrichtung als positive fest. Aus

$$\frac{i\varrho}{\omega} ds = \mathfrak{E}_s ds + \mathfrak{E}_{es} ds \quad \text{folgt dann}$$

$$\int \frac{i\varrho}{\omega} ds = \int \mathfrak{E}_{es} ds.$$

In dem Integral auf der linken Seite der Gleichung ist dieses Mal i nicht überall konstant, wohl aber in jedem Stück zwischen zwei Verzweigungspunkten. Nennen wir in jedem dieser Teile $\int \mathfrak{E}_{es} ds = f$ die elektromotorische Kraft in dem Teil, so läßt sich die Gleichung auch in der Form ausdrücken:

$$\Sigma i r = \Sigma f.$$

Als Beispiel wollen wir die Stromverteilung in der Wheatstoneschen Brücke bestimmen, die in der Fig. 14 schematisch dar-

gestellt ist. Zwei Punkte A und B sind mit den Polen einer Stromquelle verbunden. Zwischen ihnen verlaufen noch zwei weitere Drähte, und zwei beliebige Punkte C und D sind durch einen dritten Draht verbunden. Gesucht sind die Stromstärken in den sechs Verbindungswegen. Das erste Kirchhoffsche Gesetz liefert nun für drei Punkte drei Beziehungen zwischen den Unbekannten, und damit ist das Gesetz dann auch im vierten Punkt erfüllt. Wir können also direkt die Stromstärken als Unbekannte einführen. Wird die Stromstärke in $B\,E\,A$ mit i bezeichnet, so läßt sich für die in $A\,C$ und $A\,D$ schreiben j_1 bzw. $i - j_1$ und für $B\,C$ und $B\,D$ j_2 bzw. $i - j_2$. Die vorgegebenen Bedingungen für die Punkte C und D liefern dann als Stromstärke in $C\,D$ $j_1 + j_2$. Sind die Widerstände in $B\,E\,A$, $A\,C$, $B\,C$, $A\,D$, $B\,D$ und $C\,D$ der Reihe nach r, r_1, r_2, r_3, r_4 und r_5, und ist die elektromotorische Kraft des Elementes f, so folgt aus dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz:

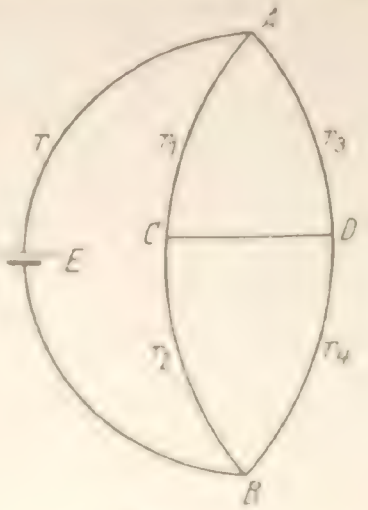

Fig. 14.

angewandt auf $A\,C\,D$ $\ldots\ j_1 r_1 + (j_1 + j_2) r_5 - (i - j_1) r_3 = 0,$

„ „ $B\,C\,D$ $\ldots\ j_2 r_2 + (j_1 + j_2) r_5 - (i - j_2) r_4 = 0,$

„ „ $B\,E\,A\,C$ $\ldots\ i r + j_1 r_1 - j_2 r_2 = f.$

Diese drei linearen Gleichungen können nach den drei Unbekannten aufgelöst werden.

An Stelle des zweiten Kirchhoffschen Gesetzes läßt sich bei der Behandlung solcher Probleme stets auch Gleichung (5) für die Verbindungsstücke zwischen je zwei Verzweigungspunkten anwenden. Für diese letzte Rechnungsart spricht sogar, daß man ohne weiteres einsieht, ebensoviele Gleichungen aufstellen zu können, wie Unbekannte vorhanden sind. Sind nämlich n Verzweigungspunkte gegeben, und gehen von jedem drei Drähte aus, so sind im ganzen $3\,n/2$ Drahtstücke vorhanden. Unbekannte sind also die $3\,n/2$ Stromstärken und die n-Potentiale in den Verzweigungspunkten. Da wir aber nur Potentialdifferenzen bestimmen wollen, so können wir ein Potential

Anm. d. Übers. Die Zahlenwerte von j_1 und j_2 haben bei dieser Bezeichnungsweise natürlich entgegengesetztes Vorzeichen.

beliebig annehmen, und damit bleiben $3n/2 + n - 1$ Unbekannte übrig. Gleichung (5) liefert für jeden Zweig eine Gleichung, d. h. wir erhalten $3n/2$ voneinander unabhängige Gleichungen. Das erste Kirchhoffsche Gesetz gibt uns eine Gleichung für jeden Verzweigungspunkt; da aber bereits die Bedingung für gleiche Mengen zu- und abströmender Elektrizität für den n^{ten} Punkt von selbst erfüllt ist, wenn sie für $n-1$ Verzweigungspunkte aufgestellt wird, so haben wir im ganzen $3n/2 + n - 1$ voneinander unabhängige Gleichungen, die uns ermöglichen, die $3n/2 + n - 1$ Unbekannten zu berechnen.

Für ein solches Leiternetz besteht ein Reziprozitätsgesetz, das an Sätze erinnert, die wir in der Elektrostatik für beliebige Leitersysteme gefunden haben. Befindet sich nur in einem Draht eine Stromquelle, so ist die Stromstärke in einem anderen gleich der Stromstärke, die im ersten Draht vorhanden wäre, wenn man, ohne an den Widerständen etwas zu ändern, die Stromquelle in den zweiten verlegte.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir die Enden des ersten Drahtes mit den Indizes 1 und 2 versehen, die Enden des zweiten mit 3, 4 usf. Entsprechend nennen wir die Stromstärke im ersten Zustand und im ersten Draht i_{12}, den Widerstand r_{12}, im zweiten Draht i_{34}, r_{34} usf. Dann gilt

für den ersten Draht	$r_{12}\, i_{12} = f + \Phi_1 - \Phi_2,$
für den zweiten Draht	$r_{34}\, i_{34} = \Phi_3 - \Phi_4,$
und für jeden anderen Draht	$r_{kl}\, i_{kl} = \Phi_k - \Phi_l,$

ferner ist für jeden Verzweigungspunkt

$$\sum_i i_{ki} = 0.$$

Wir wollen jetzt i_{34} berechnen.

Im zweiten Zustand wollen wir Stromstärken und Potentiale durch gestrichene Größen kennzeichnen, dann gilt

im ersten Draht	$r_{12}\, i_{12}' = \Phi_1' - \Phi_2'$
im zweiten Draht	$r_{34}\, i_{34}' = f + \Phi_3' - \Phi_4'$
in allen anderen Drähten	$r_{kl}\, i_{kl}' = \Phi_k' - \Phi_l'$

und in jedem Verzweigungspunkt

$$\sum_i i_{ki}' = 0.$$

Aus diesem System von Gleichungen werden wir i_{12}' berechnen und finden $i_{34} = i_{12}'$.

Wir multiplizieren die Gleichungen der ersten Gruppe mit i_{12}', i_{34}', i_{kl}' und addieren sie und tun dasselbe mit der zweiten Gruppe nach Multiplikation mit i_{12}, i_{34}, i_{kl}. Wir erhalten zwei Gleichungen, von denen die linken Seiten einander gleich sind; also müssen es auch die rechten sein. Wir erhalten

$$f i_{12}' + \Sigma (\Phi_k - \Phi_l) i_{kl}' = f i_{34} + \Sigma (\Phi_k' - \Phi_l') i_{kl}.$$

Zu beachten ist, daß bei unseren zuerst aufgestellten Gleichungen in jedem Zweig eine bestimmte Richtung als positive gewählt war, z. B. von 1 nach 2, von 3 nach 4, von k nach l. Bei genauer Betrachtung der in den Endgleichungen auftretenden Summen sieht man, daß das Potential in jedem Verzweigungspunkt multipliziert wird mit der positiven Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit von dort fortströmt, und mit der negativen Menge, die zuströmt. Daraus folgt, daß die beiden Summen verschwinden. Man kann also durch f kürzen und erhält das gesuchte Resultat.

§ 5. Die Wärmeentwicklung durch den elektrischen Strom.

Wir betrachten wieder einen Leitungsdraht zwischen zwei Punkten A und B, zwischen denen auf irgend eine Weise eine konstante Potentialdifferenz $\Phi_A - \Phi_B$ aufrecht erhalten wird. In dem Draht fließt dann ein stationärer Strom

$$i = \frac{\Phi_A - \Phi_B}{r_{AB}}.$$

In einem beliebigen Zeitabschnitt τ wird also eine Elektrizitätsmenge $i\tau$ von A nach B geführt. Damit die Potentialdifferenz erhalten bleibt, ist notwendig, daß die gleiche Elektrizitätsmenge von B nach A zurückgebracht wird, und dies erfordert eine Arbeit $i\tau(\Phi_A - \Phi_B)$. Diese Arbeit leisten natürlich die Kräfte, die die Potentialdifferenz konstant halten, z. B. im Fall eines geschlossenen Stromkreises die elektromotorischen Kräfte. Die gleiche Energiemenge findet man in der Wärmeentwicklung W des Drahtes $A\,B$ wieder. Es gilt also pro Zeiteinheit

$$W_{AB} = i(\Phi_A - \Phi_B) = i^2 r_{AB}. \qquad (7)$$

Gleichung (7) drückt das Joulesche Gesetz aus. Für den Fall einer unverzweigten Strombahn, in der die elektromotorische Kraft

F wirksam ist, läßt sich mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes der Ausdruck umformen, er gibt dann die im ganzen Stromkreis pro Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge zu,

$$W = F\,i. \tag{8}$$

W ist also außerdem die Arbeit, die die elektromotorische Kraft in der Zeiteinheit leistet.

Wir wollen jetzt die Wärmeentwicklung in einigen Fällen untersuchen, in denen der Strom nicht konstant ist. Wir werden dabei aber von Erscheinungen, die durch die Selbstinduktion beim Entstehen des Stromes hervorgerufen werden, absehen; sie werden im folgenden Kapitel besprochen werden. Genauer ausgedrückt heißt das, wir wollen den Einfluß eines veränderlichen magnetischen Feldes ringsum den Draht nicht berücksichtigen, so daß das Linienintegral der elektrischen Kraft über jede geschlossene Kurve Null bleibt.

Betrachten wir an erster Stelle den Entladungsstrom eines Kondensators. Die Potentiale der Platten vor Anbringen des Verbindungsdrahtes seien Φ_{e1} und Φ_{e2}, die Ladungen e_+ und $-e_+$, die gesamte Energie sei demnach $\frac{1}{2}e_+(\Phi_{e1}-\Phi_{e2})$. Wird ein Verbindungsdraht zwischen die Platten gelegt, so entsteht im Draht ein Strom, durch den der Kondensator entladen wird, die Energie verschwindet aus dem Feld und eine äquivalente Wärmemenge wird entwickelt. Während der Strom besteht, verkleinert sich die Ladung der Platten und damit auch ihre Potentialdifferenz kontinuierlich. Nennen wir in einem bestimmten Zeitpunkt $\mathfrak{e}$ die Ladung, Φ_1 und Φ_2 die Potentiale und i die Stromstärke (positiv gerechnet von der ersten nach der zweiten Platte), so ist, wenn r den Widerstand des Drahtes bedeutet:

$$i\,r = \Phi_1 - \Phi_2$$

oder, bei Einführung der Kapazität C des Kondensators

$$i\,r = \frac{\mathfrak{e}}{C}.$$

Hieraus folgt, daß auch i ständig abnimmt. Der Betrag, um den die Ladung $\mathfrak{e}$ während der Zeit $d\,t$ abnimmt, ist $i\,d\,t$, also

$$i = -\frac{d\,\mathfrak{e}}{d\,t},$$

damit geht die obenstehende Gleichung über in

$$-r\frac{d\,\mathfrak{e}}{d\,t} = \frac{\mathfrak{e}}{C}.$$

und es wird

$$\ln \mathfrak{e} = -\frac{t}{rC} + \text{const.}$$

Die Konstante bestimmen wir, wenn wir als Nullpunkt der Zeit den Augenblick wählen, in dem die Entladung beginnt und in dem $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0$ ist, dann folgt

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0 e^{-\frac{t}{rC}}$$

und

$$i = \frac{\mathfrak{e}_0}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Nach dieser Gleichung muß es unendlich lange dauern, bis $\mathfrak{e}$ und i Null geworden sind, mit anderen Worten, bis der Kondensator vollständig entladen ist; das steht aber in Widerspruch mit den Experimenten, die zeigen, daß der Entladungsvorgang nach kurzer Zeit abgelaufen ist. Die Erklärung hierfür liegt darin, daß, wenn t einige Male größer als rC ist, die Gleichungen Werte für $\mathfrak{e}$ und i liefern, die man praktisch als Null ansehen kann. Solch ein asymptotisches Nullwerden, bei dem schon nach kurzer Zeit ein Wert unmerkbar klein geworden ist, kommt bei physikalischen Problemen recht häufig vor.

Die Energie des Kondensators in einem willkürlichen Entladungsstadium ist

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{e}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{\mathfrak{e}^2}{2C},$$

also ihre Abnahme während der Zeit dt, die gleich der in dieser Zeit entwickelten Wärmemenge ist, beträgt

$$W\,dt = -\frac{\mathfrak{e}}{C}\frac{d\mathfrak{e}}{dt}dt = +\frac{\mathfrak{e}^2}{rC^2}dt = i^2 r\,dt;$$

also auch hier gilt das JOULEsche Gesetz. Es läßt sich weiter verifizieren, daß unsere Gleichung für die gesamte entwickelte Wärme einen Betrag ergibt, der gleich der Anfangsenergie des Kondensators ist. Wir haben dazu über die Zeit von $t = 0$ bis $t = \infty$ zu integrieren und erhalten:

$$\int_0^\infty W\,dt = \int_0^\infty i^2 r\,dt = \frac{\mathfrak{e}_0^2}{rC^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{rC}}dt = \frac{\mathfrak{e}_0^2}{2C}.$$

Wir wollen nun noch zwei Kondensatoren betrachten, die so geschaltet sind, wie es in Fig. 15 schematisch dargestellt ist, und von denen der eine bei Beginn des Versuches geladen, der andere ungeladen ist. A und B seien die Platten des geladenen Kondensators, deren Anfangsladungen $+e_0$ und $-e_0$ betragen mögen, C_1 sei die Kapazität, der ungeladene Kondensator sei $C\,D$ und besitze die Kapazität C_2. In den Verbindungsdrähten entsteht ein Strom in Richtung der Pfeile, der, wenn wir von der Elektrizitätsbewegung im Dielektrikum außerhalb der Kondensatoren absehen, in einem beliebigen Zeitpunkt überall die gleiche Stärke i besitzt. Ist r der gesamte Widerstand der Verbindungsdrähte $A\,D$ und $C\,B$ und nennen wir zu einer bestimmten Zeit die Ladung des ersten Kondensators e_1, die des zweiten e_2, so ergibt Gleichung (6) auf S. 123

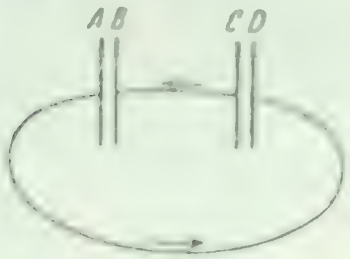

Fig. 15.

$$i\,r = \Phi_A - \Phi_D + \Phi_C - \Phi_B = \frac{e_1}{C_1} - \frac{e_2}{C_2}.$$

$i\,dt$ ist die Elektrizitätsmenge, die in der Zeit dt durch den Querschnitt des Drahtes fließt, also auch der Betrag, um den in dieser Zeit die Ladung e_1 verkleinert und e_2 vergrößert wird. Somit ist

$$i = -\frac{de_1}{dt} = \frac{de_2}{dt}.$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich der gnaue Verlauf der Erscheinung ableiten. Durch Elimination von e_1 und e_2 erhalten wir zunächst

$$r\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0$$

somit

$$i = A \cdot e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 r} t}.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante A wählen wir wieder als Nullpunkt der Zeit den Beginn des Versuches, für den $e_2 = 0$, $e_1 = e_0$ und damit $i = \frac{e_0}{r\,C_1}$ ist. Wir erhalten

$$i = \frac{e_0}{r\,C_1} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 r} t}.$$

Wie beim vorigen Versuch nähert sich die Stromstärke asymptotisch dem Werte Null. Wir erhalten weiter

$$e_1 = \frac{e_0 C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 r} t} + B,$$

worin B bestimmt ist durch $e_1 = e_0$ für $t = 0$, also

$$e_1 = e_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 r} t} + e_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Da $e_1 + e_2 = e_0$ ist, gilt weiter

$$e_2 = -e_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 r} t} + e_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Die gesamte Energie beider Kondensatoren ist

$$\frac{e_1^2}{2 C_1} + \frac{e_2^2}{2 C_2},$$

und damit beträgt die Verminderung der Energie während der Zeit dt, also auch die in dieser Zeit entwickelte Wärmemenge

$$W\,dt = \left(-\frac{e_1}{C_1}\frac{de_1}{dt} - \frac{e_2}{C_2}\frac{de_2}{dt}\right)dt = \left(\frac{e_1}{C_1} - \frac{e_2}{C_2}\right) i\,dt = i^2 r\,dt,$$

wieder in Übereinstimmung mit dem Joule'schen Gesetz.

Wir wollen nun noch die Ladung der Kondensatoren im Endzustand berechnen, wozu wir in unseren Gleichungen $t = \infty$ substituieren, und erhalten

$$e_{1\infty} = e_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad e_{2\infty} = e_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2},$$

wie zu erwarten war, denn die Gleichungen sagen aus, daß die Gesamtladung e_0 erhalten bleibt und sich über die zwei Kondensatoren im Verhältnis ihrer Kapazitäten verteilt. Es läßt sich auch leicht zeigen, daß schließlich die Energie beider Kondensatoren gleich der Anfangsenergie des einen Kondensators vermindert um den Betrag der entwickelten Wärmemenge ist.

Wir wollen zum Schluß noch den Fall betrachten, bei dem ein Kondensator von der Kapazität C durch eine Stromquelle von der elektromotorischen Kraft F aufgeladen wird. Der Widerstand der Verbindungsdrähte sei r, die Stromstärke während eines bestimmten

Zeitpunktes t und die Ladung des Kondensators in diesem Augenblick e, dann ergibt Gleichung 5 auf S. 122

$$i r - F + \frac{e}{C} = 0 .$$

Wieder ist

$$i = \frac{d e}{d t} .$$

Die Elimination von e ergibt

$$\frac{d i}{d t} = - \frac{i}{r C}$$

und somit

$$i = A e^{- \frac{t}{r C}} .$$

Da für $t = 0$, $e = 0$ und damit $i = \frac{F}{r}$ ist, so wird

$$i = \frac{F}{r} e^{- \frac{t}{r C}} ,$$

hieraus ergibt sich

$$e = - F C e^{- \frac{t}{r C}} + F C ,$$

wobei wieder die Integrationskonstante aus der Bedingung $e = 0$ für $t = 0$ bestimmt wurde.

Die Stromquelle leistet in der Zeit $d t$ die Arbeit $F i d t$, dadurch wird die Energie des Kondensators vergrößert um $\frac{e}{C} \frac{d e}{d t} d t$, der übrige Betrag kommt als Wärme im Stromkreis zum Vorschein. Er beträgt

$$W d t = \left(F i - \frac{e}{C} \frac{d e}{d t} \right) d t = i d t \left(F - \frac{e}{C} \right) = i d t F e^{- \frac{t}{r C}} = i^2 r d t ,$$

wieder in Übereinstimmung mit dem JOULEschen Gesetz.

Im Endzustand für $t = \infty$ erhalten wir für die Ladung des Kondensators

$$e_\infty = F C ,$$

wie auch zu erwarten ist, denn im Gleichgewichtszustand muß die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten $e = C$ gleich der elektromotorischen Kraft sein.

Die gesamte Energie, die die Stromquelle dabei liefert, beträgt

$$\int_0^\infty F\,i\,dt = \frac{F^2}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{rC}}\,dt = F^2\,C,$$

davon kommt als Wärme zum Vorschein

$$\int_0^\infty W\,dt = r\int_0^\infty i^2\,dt = \frac{F^2}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{rC}}\,dt = \tfrac{1}{2}F^2C,$$

also gerade die Hälfte, während wir die andere Hälfte der Energie im Kondensator aufgespeichert finden; dieser Betrag ist

$$\tfrac{1}{2}\,e_\infty F = \tfrac{1}{2}\,F^2\,C.$$

§ 6. Energiebetrachtungen.

In einem geschlossenen Stromkreis ist die während einer bestimmten Zeit entwickelte Wärmemenge der Arbeit äquivalent, die in dieser Zeit von den elektromotorischen Kräften geleistet wird. Die Art dieser Kräfte kann sehr verschieden sein, oder, anders ausgedruckt, die durch den Strom verbrauchte Energie, die von den Kontaktstellen herstammt, an denen die elektromotorischen Kräfte ihren Sitz haben, kann sehr verschiedenen Ursprung haben. So wird in einem galvanischen Element, während der Strom fließt, chemische Energie verbraucht. Bei einem Thermoelement wird Energie von der erwärmten Kontaktstelle in Form von Wärme absorbiert; an der tiefer temperierten Kontaktstelle hingegen wird Wärme frei, und die Differenz zwischen aufgenommener und abgegebener Wärmemenge muß der im Kreis entwickelten (Strom)-Wärme gleich sein. Daß an der Kontaktstelle mit der höheren Temperatur wirklich Wärme verbraucht wird, daß sich diese Stelle abkühlt, wenn Wärme nicht von außen nachgeliefert wird, und zwar mehr abkühlt als durch Wärmeableitung zu erklären ist, und daß das Umgekehrte an der Kontaktstelle mit der niedrigeren Temperatur stattfindet, ist von Peltier entdeckt worden. Hier haben wir es also an den Kontaktstellen außer mit der Joule'schen Wärme mit der Peltier-Wärme zu tun. Etwas ähnliches hat auch Thomson bei einem Draht gefunden, der aus nur einem Metall bestand und von dem ein Stück eine höhere Temperatur besaß als ein anderes.

Bei der Entladung eines Kondensators wird die elektrische Energie, die im Feld zwischen den Platten aufgespeichert ist, in diejenige Wärme umgesetzt, die im Verbindungsdraht entwickelt wird. Verwenden wir eine Elektrisiermaschine als Stromquelle, so rührt die vom Strom entwickelte Wärme von der zum Bewegen der Maschine notwendigen Arbeit her.

In allen diesen Fällen, bei denen wir es mit vorgegebenen elektromotorischen Kräften zu tun haben, ist die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit der Stromstärke proportional. So z. B. leistet die elektromotorische Kraft eines galvanischen Elementes im ganzen keine Arbeit, solange kein Strom fließt; es treten dann auch keine chemischen Umsetzungen ein, d. h. es wird keine chemische Energie verbraucht. Fließt durch das Element ein Strom in entgegengesetzter Richtung, wie ihn die elektromotorische Kraft liefern würde (was natürlich nur durch andere im Stromkreis befindliche elektromotorische Kräfte möglich ist), so leistet die elektromotorische Kraft eine negative Arbeit, d. h. die chemische Energie des Elementes nimmt zu. Am einfachsten können wir diese Erscheinungen bei einem sogenannten umkehrbaren Element beobachten, das wir z. B. erhalten, wenn wir in einem Daniell-Element die verdünnte Schwefelsäure durch verdünntes Zinksulfat ersetzen. Die untenstehende Fig. 16 gibt solch ein Element schematisch wieder. Wird das Element von einem Strom durchflossen, den es selbst liefert, oder von einem Strom in gleicher Richtung, d. h. der vom Zink zum Kupfer fließt, so treten die bekannten Ionen-Umsetzungen ein: die Zinkatome verbinden sich mit den SO_4-Ionen und gehen in Lösung, freies Cu entsteht und schlägt sich auf der Kupferplatte nieder. Die chemischen Umsetzungen, im ganzen betrachtet, ergeben also: es entsteht mehr Zinksulfat, während die Zinkplatte abnimmt, und das freie Kupfer nimmt zu auf Kosten des Kupfersulfats. Die chemische Energie wird dabei geringer. Lassen wir durch das Element einen Strom in umgekehrter Richtung fließen, so haben alle chemischen Umsetzungen den umgekehrten Sinn, und die chemische Energie des Elementes muß darum vergrößert werden.

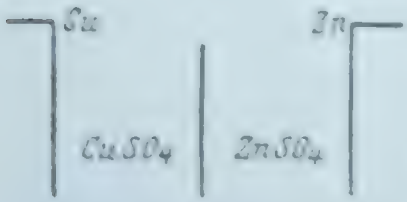

Fig. 16.

Ebenso wird in einem Thermoelement Wärme weder entwickelt noch aufgenommen, solange kein Strom fließt, ferner kehrt der Peltier-Effekt sein Vorzeichen um, wenn das Element von einem Strom durchflossen wird, dessen Richtung dem Elementstrom entgegengesetzt gerichtet ist. In diesem Fall wird Wärme an der höher temperierten Kontaktstelle frei, während an der kälteren eine (kleinere) Wärmemenge aufgenommen wird. Ganz ähnliches gilt für den Thomson-Effekt.

Denken wir uns weiter einen unverzweigten Stromkreis, in dem sich eine Stromquelle mit der elektromotorischen Kraft F befindet. Es lassen sich verschiedene Beispiele anführen für Versuche, in denen die Gleichung $F = i\,r$ nicht gilt. Wir wollen zuerst eines besprechen, für das $F > i\,r$ ist. Um die Ursache für das Bestehen der Ungleichung zu finden, ist es am einfachsten, die Energie zu untersuchen. Wir erweitern beide Seiten der Ungleichung mit $i\,d\,t$, dann wird $F\,i\,d\,t > i^2\,r\,d\,t$, in Worten, während der Zeit $d\,t$ leistet die Stromquelle mehr Arbeit, als nach dem Joule'schen Gesetz durch Wärme frei wird. Dieser Fall wird z. B. eintreten, wenn in den Kreis eine Wasserzersetzungszelle eingeschaltet ist. Den Rest der Energie finden wir dann in Form von chemischer Energie wieder, die die voneinander getrennten Bestandteile des Wassers, Wasserstoff und Sauerstoff, relativ zueinander besitzen.

Etwas ähnliches tritt ein, wenn sich in dem Kreis ein Kondensator befindet, der durch die Stromquelle aufgeladen wird. Aus den Gleichungen auf S. 134 folgt direkt, daß auch hierbei $F > i\,r$ und damit $F\,i > i^2\,r$ ist. Derjenige Teil der von der elektromotorischen Kraft verrichteten Arbeit, der nicht in Stromwärme im Draht umgesetzt ist, wird zur Vergrößerung der Feldenergie zwischen den Kondensatorplatten verwandt.

Bei einem gewöhnlichen Stromkreis, in dem die elektromotorische Kraft F wirksam ist, dauert es infolge der Selbstinduktion eine gewisse Zeit, bis der Strom nach Schließen des Kreises seinen definitiven Wert angenommen hat. Unmittelbar nach dem Schließen des Kontaktes ist darum $i < F/r$, also $i^2\,r < F\,i$. Die Differenz zwischen der Arbeit der elektromotorischen Kraft und der Wärmeentwicklung des Stromes ist in der Energie des magnetischen Feldes aufgespeichert, von der wir später sprechen werden. Ein anderes Beispiel: wenn ein Strom durch eine Spule fließt und wenn sich in der verlängerten Achse

dieser Spule ein Magnet befindet, so unterliegt der Magnet einer anziehenden bzw. einer abstoßenden Kraft. Folgt der Magnet der Kraft, so leistet diese eine positive Arbeit; die dazu notwendige Energie muß von der Stromquelle geliefert werden und kann darum nicht als Stromwärme im Draht in Erscheinung treten. Auch in diesem Fall muß darum $i^2 r < F i$ und somit $i < F/r$ sein.

Ebenso lassen sich Beispiele anführen, bei denen $i > F/r$ und damit $i^2 r > F i$ ist. Es muß dann stets außer in der Stromquelle noch irgendwo im System Energie verschwinden und als Wärme im Leitungsdraht wieder zurückgefunden werden.

Eine Bemerkung, die für alle diese Fälle gilt, ist die folgende: ist $i > F r$ oder $i < F/r$, so muß außer der elektromotorischen Kraft F noch irgend etwas anderes vorhanden sein (Polarisation einer elektrolytischen Zelle, Induktion usf.), was die Elektrizität in der gleichen oder in der entgegengesetzten Richtung wie F in Bewegung setzt.

§ 7. Der Strom im dreidimensionalen Raum.

Wir wollen jetzt einen stationären Strom betrachten, der in einem von einem Dielektrikum umgebenen, dreidimensionalen Raume fließt. In der Natur kommen, streng genommen, natürlich nur solche Ströme vor, und wir werden unsere Überlegungen im allgemeinen dann anstellen müssen, wenn in den Stromkreis ein Elektrolyt oder ein größeres Metallstück eingeschaltet ist. Wir wollen uns vorstellen, daß an der einen Grenzfläche des betrachteten Leiterteiles Elektrizität zugeführt wird, nämlich an der Anode, und daß sie an der anderen Grenze den Leiter wieder verläßt, an der Kathode. Anode und Kathode brauchen nicht die ganze Grenzfläche zu bilden, es kann auch noch ein Teil übrig bleiben — wir wollen ihn σ nennen — durch den keine Elektrizität strömt. An der Oberfläche dieses stromfreien Teiles ist dann überall $\mathsf{C}_n = 0$, wenn n die Richtung der Normalen angibt. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß in dem betrachteten Raumteil **keine elektromotorische Kraft wirke.**

Für stationäre Zustände ist auch hierbei längs einer geschlossenen Kurve $\int \mathsf{E}_s \, d\,s = 0$ und somit E ein Potentialvektor. Ist der Leiter isotrop, so ist $\mathsf{C} = 1/\varrho \, \mathsf{E}$, ist er außerdem homogen, ist also ϱ konstant, so folgt aus der Gleichung $\operatorname{div} \mathsf{C} = 0$ wieder $\Delta \Phi = 0$. Unser Problem hat also große Ähnlichkeit mit Problemen aus der Elektrostatik, nur sind die Grenzbedingungen jetzt andere. Die Grenzbedingungen sagen

nichts über den Wert von Φ im Unendlichen aus, hingegen kommt als Bedingung für die Oberfläche von σ hinzu $\tilde{\alpha}\,\partial\Phi/\partial n = 0$, was aus $C_n = 0$ folgt. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß das Potential an der Anode einheitlich den Wert Φ_1 und an der Kathode den Wert Φ_2 haben möge. Diese Annahme ist nicht ohne weiteres erlaubt. Denn bestehen die Elektroden z. B. aus flachen, vertikal gestellten Eisenplatten, die an den oberen Enden mit den Polen eines Elementes verbunden sind, und ist das zwischen ihnen befindliche Medium ein Stück Kupfer, so wird der Strom hauptsächlich durch das oberste Kupferstück fließen. Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im oberen Teil der Elektroden wird größer sein als die zwischen zwei Punkten im unteren Teil. Unsere Voraussetzung, das Potential sei auf der ganze Anode bzw. der ganzen Kathode einheitlich, kann darum der Wirklichkeit nicht streng entsprechen. Sie ist aber erlaubt, wenn das Leitvermögen der Elektroden groß ist im Vergleich zu dem Leitvermögen des Zwischenmediums. In diesem Fall wird der Widerstand innerhalb der Elektroden vernachlässigbar klein gegenüber dem Widerstand des Mediums zwischen den Elektroden, und daraus folgt, daß vom Potentialabfall in den Elektroden abgesehen werden kann.

Wir nehmen also an, unsere Elektroden seien Äquipotentialflächen; E und C stehen senkrecht auf ihnen, an der Anode ist $\mathsf{C} = -C_n$, an der Kathode $\mathsf{C} = C_n$. Aus der Inkompressibilität der Elektrizität folgt, $\int \mathsf{C}\, d\sigma$, erstreckt über die Anode und über die Kathode hat den gleichen Wert, da dieses Integral die gesamte Elektrizitätsmenge angibt, die in der Zeiteinheit auf die eine Elektrode zuströmt bzw. von der anderen fortströmt. Den Wert des Integrals wollen wir wieder **Stromstärke nennen und ihn mit i bezeichnen.**

Aus dem Superpositionsprinzip läßt sich jetzt leicht ableiten, daß i proportional der Potentialdifferenz $\Phi_1 - \Phi_2$ ist. Wir superponieren einem Zustand, bei dem die Potentiale $\Phi_1 - \Phi_2$ und 0 sind, einen zweiten, bei dem beide Elektroden das gleiche Potential Φ_2 besitzen. In diesem letzteren Fall fließt kein Strom; die Stromstärke in dem wirklichen Zustand ist also dieselbe wie im ersten, und, wenn für die Potentiale 1 und 0 die Stromstärke $1/R$ beträgt, so beträgt sie für die Potentiale $\Phi_1 - \Phi_2$ und 0 und ebenso für die Potentiale Φ_1 und Φ_2

$$i = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Die Größe R wollen wir wieder Widerstand des betrachteten Leiters nennen.

Die mathematische Behandlung unseres Problems gleicht in vielen Punkten den entsprechenden aus der Elektrostatik. Betrachten wir als erstes Beispiel zwei konzentrische Kugeln als Elektroden mit den Radien a_1 und a_2 ($a_1 < a_2$). Es bleibt jetzt kein Teil einer Grenzfläche übrig, für den die Bedingung $\partial \Phi / \partial n = 0$ erfüllt sein müßte, und die Analogie mit dem entsprechenden elektrostatischen Problem ist eine vollständige. Es ist wieder klar, daß Φ allein von r, dem Abstand bis zum gemeinsamen Kugelmittelpunkt, abhängen wird. Darum bringen wir die LAPLACEsche Gleichung in die Form

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) = 0,$$

woraus folgt

$$\Phi = -\frac{C}{r} + C_1.$$

Die Konstanten bestimmen wir aus der Grenzbedingung, daß $\Phi = \Phi_1$ für $r = a_1$ und $\Phi = \Phi_2$ für $r = a_2$ sein muß. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\Phi = -\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}\,\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r} + \frac{a_1 \Phi_1 - a_2 \Phi_2}{a_1 - a_2},$$

und daraus folgt weiter (E, C und i nach außen gerichtet)

$$\mathrm{E} = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}\,\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r^2},$$

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\varrho}\,\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}\,\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r^2}.$$

Durch Integration über eine der Kugeln folgt:

$$i = \frac{4\pi}{\varrho}\,\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

und somit

$$R = \frac{\varrho}{4\pi}\,\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}.$$

Als zweites Beispiel wählen wir als Elektroden sehr lange, koaxiale Zylinder mit den Radien a_1 und a_2 ($a_1 < a_2$). Nennen wir

r den Abstand eines beliebigen Punktes von der Zylinderachse, so ist klar, daß Φ allein von r abhängen kann. Wir transformieren die Laplacesche Gleichung in:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} = 0,$$

und erhalten:

$$\Phi = C_1 \ln r + C_2.$$

Da $\Phi = \Phi_1$ für $r = a_1$ und $\Phi = \Phi_2$ für $r = a_2$ ist, so folgt:

$$\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln a_1/a_2} \ln r + \frac{\Phi_2 \ln a_1 - \Phi_1 \ln a_2}{\ln a_1/a_2}$$

und ferner

$$E = -\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln a_1/a_2}\frac{1}{r}$$

$$C = -\frac{1}{\varrho}\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln a_1/a_2}\frac{1}{r}.$$

Wir können diese Gleichungen auf einen Elektrolyten anwenden, der sich in einem unten geschlossenen Glasgefäß zwischen zwei vertikal stehenden, koaxialen Metallzylindern befindet. Die mathematische Behandlung ist wieder so wie bei dem entsprechenden Problem in der Elektrostatik, den Grenzflächen des Elektrolyten, durch die keine Elektrizität strömt, entsprechen im elektrostatischen Fall die durch die Kraftlinien gebildeten Flächen. Der Zustand im Elektrolyten ist derselbe, als ob der Zylinder unbegrenzt lang wäre. Nennen wir die Höhe der Flüssigkeitssäule h, so finden wir

$$i = -\frac{2\pi h}{\varrho}\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln a_1/a_2}$$

und

$$R = \varrho \cdot \frac{\ln a_2/a_1}{2\pi h}.$$

In den beiden besprochenen Beispielen ist der Widerstand proportional dem Koeffizienten ϱ, also umgekehrt proportional dem spezifischen Leitvermögen des betrachteten Stoffes. Man kann leicht zeigen, daß dieses letztere Resultat unabhängig von der Elektrodenform und der weiteren Begrenzung des betrachteten Stoffes gilt, falls dessen

Leitvermögen wirklich klein gegenüber dem Leitvermögen der Elektroden ist. Wir wollen z. B. zwei Elektrolyte vergleichen, die sich in gleichgeformten Gefäßen und zwischen kongruenten und gleich gestellten Elektroden befinden. Haben wir für den einen Elektrolyten die Lösung für das Potential Φ gefunden, so muß Φ für den zweiten genau denselben Bedingungen genügen, wir werden also dieselben Äquipotentialflächen, die gleichen elektrischen Kraftlinien und darum auch dieselben Stromlinien finden. Die elektrische Kraft kann in beiden Fällen gleich gemacht werden, aber der Strom wird, wenn im zweiten Fall das spezifische Leitvermögen n mal größer ist, auch n mal größer sein. Ist i aber n mal größer, so ist der Widerstand n mal kleiner. Die Methode läßt sich anwenden, um das spezifische Leitvermögen verschiedener Flüssigkeiten miteinander zu vergleichen.

Wir besprechen noch ein weiteres Beispiel: die Kathode sei eine ebene Fläche, die Anode ein dünner Metalldraht, dessen Spitze allein frei ist und in geringem Abstand von der Kathode steht.

Zwischen den Elektroden befinde sich wieder ein Elektrolyt, z. B. $CuSO_4$; bei Stromdurchgang schlägt sich Kupfer auf der Kathode nieder, und zwar um so mehr, je größer die Stromstärke ist. Nur in einem kleinen Teil der betrachteten Flüssigkeit werden Stromlinien von merklicher Dichte verlaufen. Die mathematische Behandlung dieses Problems wird darum der des elektrostatischen entsprechen, bei welchem nach dem Feld zwischen einem geladenen Punkt und einer gegenüberstehenden, ebenen Platte gefragt wird. Die Lösung unserer Fragen können wir durch Anwendung der Theorie der elektrischen Bilder finden. Das elektrische Bild der Anode ist ein Punkt, der im selben Abstand hinter der Kathodenfläche liegt, wie die Anode selbst vor ihr. Nennen wir h den Abstand Anode —Kathode und ferner den Abstand eines beliebigen Punktes von der Anode r und von ihrem elektrischen Bild r', so finden wir für das Potential, wenn das der Kathode Null gesetzt wird,

$$\Phi = A\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

woraus wir ohne jede Mühe für die Stromdichte in einem Punkt der Kathode ableiten

$$C = \frac{2\,A\,h}{\varrho}\,\frac{1}{r^3}.$$

Die Stromdichte ist also im Fußpunkt des von der Anode aus gefällten Lotes am größten. In konzentrischen Kreisen um diesen Punkt ist sie gleich groß und nimmt mit der Entfernung vom Mittelpunkt allmählich ab. Es wird sich also eine Kupferschicht niederschlagen, die im Fußpunkt des Lotes am dicksten ist und nach allen Seiten hin dünner wird. Wenn auf solch eine dünne Schicht Licht fällt, so entstehen Interferenzerscheinungen, die unter dem Namen Nobilische Ringe bekannt sind.

Viertes Kapitel.

Induktionsströme.

§ 1. Selbstinduktion.

Wir haben in Kapitel I bereits von dem Entstehen eines Stromes in einem geschlossenen Leiter als Folge eines veränderlichen magnetischen Feldes in der Umgebung gesprochen. Auf diese Erscheinung werden wir jetzt näher eingehen.

Wenn in einem Draht keine elektromotorische Kraft wirkt, so gilt für jeden Punkt

$$C_s = \frac{1}{\varrho} E_s \tag{1}$$

und darum, wenn ω den Drahtquerschnitt und i die Stromstärke bedeutet,

$$i = \frac{1}{\varrho} \omega E_s .$$

woraus folgt

$$i \int \frac{\varrho}{\omega} d s = \int E_s d s$$

und nach unserer früheren Definition

$$i r = \int E_s d s ,$$

wobei die Integration über den ganzen Draht erstreckt zu denken ist. Dieses Resultat können wir mit Hilfe der zweiten Hauptgleichung (in elektromagnetischen Einheiten, s. S. 66 und 73) umformen und erhalten

$$i = -\frac{1}{r} \frac{d}{d t} \int B_n d \sigma . \tag{2}$$

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung, das über eine Fläche zu erstrecken ist, deren Rand der Draht bildet, ist eine Größe, die

man nach FARADAY die Anzahl der vom Draht umschlossenen Induktionslinien nennt. Wir wollen sie mit dem Buchstaben N bezeichnen und erhalten also

$$i = -\frac{1}{r}\frac{dN}{dt}. \tag{3}$$

Durch Integration ergibt sich hieraus für die gesamte Elektrizitätsmenge, die in der Zeit von t_1 bis t_2 durch einen beliebigen Querschnitt strömt

$$\int_{t_1}^{t_2} i\,dt = \frac{N_1 - N_2}{r}.$$

Ist im Stromkreis noch eine elektromotorische Kraft $F = \int \mathrm{E}_{es}\,ds$ vorhanden, so ist in (1) an Stelle von E_s zu schreiben $\mathrm{E}_s + \mathrm{E}_{es}$ und man erhält statt Gleichung (3)

$$i = -\frac{1}{r}\frac{dN}{dt} + \frac{F}{r}. \tag{4}$$

Wir wollen nun zunächst annehmen, es sei allein das magnetische Feld vorhanden, das der Strom selber hervorruft. Ob außerdem noch ein konstantes Magnetfeld besteht, z. B. das erdmagnetische Feld, ist unwesentlich, da in der Gleichung allein die Änderung der Größe N mit der Zeit auftritt. Das Feld des Stromes selbst ist veränderlich, solange der Strom noch nicht seine volle Stärke angenommen hat oder solange er verschwindet, nachdem die elektromotorische Kraft aufgehört hat zu wirken.

Die magnetische Kraft in einem beliebigen Punkt des Feldes ist in jedem Augenblick proportional mit i; dasselbe gilt darum auch für die Induktion B und somit auch für N. Wir können also setzen:

$$N = L\,i.$$

Die Größe L wird Selbstinduktionskoeffizient genannt. Sie ist stets positiv, da die durch den Strom erzeugten Kraftlinien stets in einer Richtung den Stromkreis schneiden, die dem positiven Strom entspricht. Falls keine magnetisierbaren Stoffe im Feld vorhanden sind, hängt L allein von dem Verlauf des Leitungsdrahtes ab. Der Koeffizient gibt die Anzahl Induktionslinien an, die den Stromkreis schneiden, wenn die Stromstärke 1 ist. Man kann darum leicht sehen, wann der Koeffizient groß ist, dann z. B., wenn der Draht zu einer Spule mit vielen Windungen aufgewickelt ist.

Es sei betont, daß das oben Gesagte auch gilt, falls sich in der Nähe des Leiters magnetisierbare Körper befinden, für welche die magnetische Induktion der magnetischen Kraft proportional ist; denn bei vorgegebenem Strom ist das gesamte magnetische Feld durch die erste MAXWELLsche Gleichung (s. S. 53) zusammen mit der Beziehung $B = \mu H$ (s. S. 61) und durch den solenoidalen Charakter von B (s. S. 61) gegeben. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Werte von H und B in jedem Punkt proportional der Stromstärke i sind, so daß stets $N = i\,L$ gesetzt werden kann. Der Selbstinduktionskoeffizient hängt jedoch noch von der Lage und der Form der magnetisierbaren Körper ab.

Um den Verlauf der Stromstärke nach Schließen des Kreises zu berechnen, schreiben wir Gleichung (4) in der Form:

$$i = -\frac{1}{r}\frac{d\,(Li)}{dt} + \frac{F}{r}. \tag{5}$$

Der Widerstand r möge zeitlich konstant sein, und wir wollen zunächst auch L und F als zeitlich konstant ansehen. Die Gleichung läßt sich dann leicht integrieren, und wir erhalten:

$$i = C\,e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{F}{r}.$$

Die Integrationskonstante C wird bestimmt durch die Grenzbedingung $i = 0$ für $t = 0$, also $C = -F/r$, und damit ist

$$i = \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)\frac{F}{r}.$$

$F/r = i_0$ ist der Strom, der ohne vorhandene Selbstinduktion fließen würde. Als Folge der Selbstinduktion wird i_0 ein Strom i' von geringerer Stärke und entgegengesetzter Richtung superponiert. Er heißt Extrastrom. Er nimmt mit wachsendem t ab und verschwindet für unsere Beobachtung bald, obgleich er theoretisch erst nach unendlich langer Zeit den Wert 0 annimmt. Auf diese Weise gibt die Theorie Rechenschaft über den experimentellen Befund, daß der Strom zwar in sehr kurzer Zeit aber doch kontinuierlich von Null auf seinen Maximalwert ansteigt. Die gesamte Elektrizitätsmenge, die als Folge des Extrastromes durch den Querschnitt fließt, oder, wie man sagt, der gesamte Extrastrom ist

$$\int_0^\infty i' \, dt = -i_0 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{r}{L}t} \, dt = -i_0 \frac{L}{r}.$$

In gleicher Weise läßt sich untersuchen, wie das Verschwinden des Stromes i_0 vor sich geht. Wir wollen annehmen, F werde momentan gleich Null. Dann gilt für i

$$i = -\frac{L}{r} \frac{di}{dt},$$

wobei $i = i_0$ für $t = 0$ ist, also

$$i = i_0 e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Die Gleichung gibt einen Extrastrom an, der in Richtung des Hauptstromes fließt, im übrigen aber demjenigen beim Schließen des Kreises analog ist. Für den gesamten Extrastrom erhalten wir jetzt $i_0 \cdot L/r$.

Bereits im vorigen Kapitel (S. 137) haben wir von diesen Extraströmen gesprochen. Der Extrastrom beim Stromschließen bewirkt, daß sofort nach Einschalten des Stromes die Stromquelle mehr Arbeit leistet, als der durch den Strom entwickelten Wärme entspricht. Die Differenz finden wir als Energie im umgebenden Raum wieder, wo während dieser Zeit ein magnetisches Feld entsteht, und die gleiche Energiemenge wird durch den Extrastrom in Wärme umgesetzt, während der Strom i_0 verschwindet.

Diese Energiemenge läßt sich leicht berechnen. Während der Zeit dt gleich nach Schließen des Stromkreises beträgt die Arbeit der elektromotorischen Kraft $F i \, dt$, die entwickelte Wärmemenge ist $i^2 r \, dt$, also hat die im Felde aufgespeicherte Energie den Wert

$$(F i - i^2 r) \, dt.$$

Dieser Betrag ist nach Gleichung (5), falls der Selbstinduktionskoeffizient konstant ist, gleich

$$L i \frac{di}{dt} dt,$$

und somit die gesamte Energie, die im Medium aufgespeichert ist, wenn der Strom stationär geworden ist

$$A = \tfrac{1}{2} L i^2. \qquad (6)$$

§ 2. Willkürlich gegebene elektromotorische Kräfte.

Unsere Gleichungen liefern auch eine Lösung, wenn F eine gegebene Funktion der Zeit ist, wir dürfen sogar voraussetzen, daß r und L zeitlich veränderlich sind. Mathematisch stellen wir uns damit die Aufgabe, eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten zu lösen. Die Lösung kann stets auf Quadraturen zurückgeführt werden. Wir wollen uns hier jedoch auf den Fall beschränken, wo allein F variabel ist, damit ist dann auch i und das magnetische Feld um den Leiter veränderlich und die Selbstinduktion wirkt dauernd.

Unsere Gleichung lautet

$$i = -\frac{L}{r}\frac{di}{dt} + \frac{F}{r},$$

worin F nun eine gegebene Funktion von t ist. Die Lösung heißt:

$$i\,e^{\frac{r}{L}t} = C + \frac{1}{L}\int F\,e^{\frac{r}{L}t}\,dt,$$

wobei die Konstante C aus dem gegebenen Anfangswert von i berechnet werden kann.

Der wichtigste Fall ist der einer periodischen elektromotorischen Kraft und vor allem einer solchen, die in der Form geschrieben werden kann

$$F = a\cos n\,t.$$

Die Lösung lautet dann:

$$i = C\,e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{a\,r}{r^2 + L^2 n^2}\cos n\,t + \frac{a\,n\,L}{r^2 + L^2 n^2}\sin n\,t.$$

Der Einfluß eines Stromes, der eventuell bei Beginn des Versuches vorhanden war, kommt allein im ersten Term zum Ausdruck und wird darum nach kurzer Zeit verschwindend klein. Wir erhalten also bei Vernachlässigung dieses ersten Termes:

$$i = \frac{a\,r}{r^2 + L^2 n^2}\cos n\,t + \frac{a\,n\,L}{r^2 + L^2 n^2}\sin n\,t.$$

Setzen wir hierin:

$$\frac{r}{r^2 + L^2 n^2} = \frac{1}{\varrho}\cos\varPhi \qquad \frac{n\,L}{r^2 + L^2 n^2} = \frac{1}{\varrho}\sin\varPhi^{1}),$$

[1]) Die hier eingeführte Größe ϱ bedeutet natürlich etwas anderes als der Koeffizient in Gleichung (1).

also

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{n L}{r}, \qquad \varrho^2 = r^2 + L^2 n^2,$$

so ergibt sich

$$i = \frac{a}{\varrho} \cos (n t - \Phi).$$

Da tg Φ positiv ist, so folgt hieraus, daß in diesem Fall der Wechselstrom in der Phase der elektromotorischen Kraft nacheilt. Die Phasenverschiebung ist klein, wenn L klein und r groß ist, und wenn die elektromotorische Kraft langsam veränderlich, also n klein ist. Wechselt die elektromotorische Kraft sehr schnell, so nähert sich die Phasenverschiebung dem Wert von $\frac{1}{4}$ Periode. Wir weisen darauf hin, daß die Größe ϱ in unserer Gleichung die Rolle des Widerstandes bei stationären Strömen übernimmt.

§ 3. Gegeninduktion.

Wir gehen jetzt zu zwei geschlossenen Stromkreisen über, in deren Nachbarschaft sich magnetisierbare Körper befinden können. In jedem Stromkreis wollen wir eine bestimmte Richtung als positive wählen; welche werden wir gleich noch festsetzen. Wir bezeichnen alle Größen, die auf den ersten Leiter Bezug haben mit dem Index 1, die auf den zweiten mit dem Index 2. Wenn in beiden Kreisen bestimmte Ströme fließen, so läßt sich die magnetische Induktion in irgendeinem Punkt als Resultante zweier Vektoren erhalten, deren erster, B_1, die magnetische Induktion bedeutet, die der erste Stromkreis allein hervorbringen würde; dieses B_1 ist proportional mit i_1; der zweite, B_2, entspricht in gleicher Weise dem Strom im zweiten Kreis und ist proportional mit i_2. Zunächst haben wir wieder die Oberflächenintegrale der magnetischen Induktion aufzusuchen, erstreckt über die Flächen, deren Begrenzung unsere Stromkreise sind. Wir erhalten:

$$\int \mathrm{B}_n \, d\sigma_1 = \int \mathrm{B}_{1n} \, d\sigma_1 + \int \mathrm{B}_{2n} \, d\sigma_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

und

$$\int \mathrm{B}_n \, d\sigma_2 = \int \mathrm{B}_{1n} \, d\sigma_2 + \int \mathrm{B}_{2n} \, d\sigma_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 .$$

Von den vier hier eingeführten Koeffizienten sind L_1 und L_2 die Selbstinduktionskoeffizienten des ersten und zweiten Stromkreises.

Ferner werden wir beweisen, daß $M_{21} = M_{12}$ ist. Sind im Feld keine magnetisierbaren Körper vorhanden, so ist die magnetische Induktion gleich der magnetischen Kraft, B_1 und B_2 lassen sich darum berechnen (s. Kap. I), wenn man die Ströme durch magnetische Doppelschichten ersetzt, deren Ränder die Stromkreise bilden und die wir darum in die schon gewählten Flächen σ_1 und σ_2 verlegen. Das magnetische Moment eines Elementes $d\sigma_1$ wird hierbei (in elektromagnetischen Einheiten s. S. 44 und 73) $i_1 d\sigma_1$, senkrecht auf $d\sigma_1$, und wir können B_1 aus einem magnetischen Potential ableiten

$$\psi_1 = i_1 \int \frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_1 .$$

Wir erhalten

$$M_{21} = \frac{1}{i_1}\int B_{1n}\, d\sigma_2 = -\frac{1}{i_1}\int \frac{\partial \psi_1}{\partial n_2} d\sigma_2 = -\int\int \frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_1\, d\sigma_2 .$$

Für M_{12} erhalten wir offenbar denselben Ausdruck, womit unsere Behauptung $M_{12} = M_{21}$ bewiesen ist. Daß sie auch gilt, wenn magnetisierbare Körper vorhanden sind, wird gleich bewiesen worden.

Die Größe $M = M_{12} = M_{21}$ wird Koeffizient der wechselseitigen Induktion oder der Gegeninduktion genannt. Ihr Vorzeichen hängt von der Stromrichtung in den zwei Kreisen ab. Kehren wir eine von beiden um, so verändern wir damit die entsprechende positive Richtung der Normalen auf der durch den Stromkreis gelegten Fläche und nach der letzten Gleichung darum auch das Vorzeichen von M. Wir wollen die positiven Richtungen jetzt so wählen, daß M positiv ist. Diese Richtungen nennen wir einander korrespondierend. In einem der Stromkreise kann die positive Richtung dann trotzdem noch willkürlich gewählt werden. Die Gleichungen, die die Stromstärken bestimmen, lauten nun

$$\begin{aligned} i_1 r_1 &= F_1 - L_1 \frac{d i_1}{d t} - M \frac{d i_2}{d t} , \\ i_2 r_2 &= F_2 - M \frac{d i_1}{d t} - L_2 \frac{d i_2}{d t} , \end{aligned} \tag{7}$$

wobei F_1 und F_2 als willkürlich gegebene Funktionen der Zeit zu betrachten sind.

Zunächst leiten wir hieraus den Ausdruck für die Energie im umgebenden Medium ab. Während der Zeit dt vergrößert sich diese um

$$F_1 i_1 dt - i_1^2 r_1 dt + F_2 i_2 dt - i_2^2 r_2 dt,$$

also um

$$\left(i_1 L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 M \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 M \frac{di_1}{dt}\right) dt.$$

Durch Integration erhalten wir hieraus für die gesamte Energie

$$A = \tfrac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \tfrac{1}{2} L_2 i_2^2, \tag{8}$$

wobei die Integrationskonstante so bestimmt worden ist, daß die Energie Null wird, wenn kein Strom fließt.

Dieser Ausdruck muß unabhängig von Größe und Richtung des Stromes positiv sein, und darum ist stets

$$M^2 < L_1 L_2.$$

Die Berechnung der Energie kann auch dazu dienen, die Gleichheit der Koeffizienten M_{12} und M_{21} zu beweisen. Denn schreibt man in den Gleichungen (7) M_{12} bzw. M_{21} an Stelle von M, so findet man für die Energie, die in einer unendlich kleinen Zeit im Medium aufgespeichert wird, den Ausdruck

$$(i_1 L_1 + i_2 M_{21})\, d i_1 + (i_2 L_2 + i_1 M_{12})\, d i_2.$$

Da nun der Zustand des Mediums in jedem Augenblick durch i_1 und i_2 bestimmt ist, muß dieser Ausdruck das Differential einer Funktion von i_1 und i_2 sein, woraus $M_{12} = M_{21}$ folgt. Dieser Beweis bleibt bestehen, wenn magnetisierbare Körper vorhanden sind.

Um eine Lösung für die Gleichungen (7) zu erhalten, multiplizieren wir die zweite mit einem noch näher zu bestimmenden Faktor λ und addieren sie zur ersten; wir erhalten:

$$i_1 r_1 + \lambda i_2 r_2 = F_1 + \lambda F_2 - \left\{(L_1 + \lambda M)\frac{di_1}{dt} + (M + \lambda L_2)\frac{di_2}{dt}\right\}. \tag{9}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer muß bis auf einen konstanten Faktor der Differentialquotient der linken Seite der Gleichung sein; wir können also integrieren, falls wir λ so bestimmen, daß

$$\frac{r_1}{\lambda r_2} = \frac{L_1 + \lambda M}{M + \lambda L_2} \tag{10}$$

oder

$$\lambda^2 + \lambda \frac{L_1 r_2 - L_2 r_1}{M r_2} - \frac{r_1}{r_2} = 0 \quad \text{ist.}$$

Da r_1 und r_2 beide positiv sind, hat diese quadratische Gleichung stets zwei reelle Wurzeln (eine positive und eine negative), die wir λ' und λ'' nennen wollen. Setzen wir in (9) für λ die erste Wurzel ein und nennen

$$\frac{\lambda' r_2}{r_1} = p',$$

so erhalten wir

$$r_1 (i_1 + p' i_2) = F_1 + \lambda' F_2 - (L_1 + \lambda' M) \frac{d}{dt}(i_1 + p' i_2), \qquad (11)$$

woraus sich durch Integration ergibt

$$i_1 + p' i_2 = f(t, C'). \qquad (12)$$

Hierin ist f eine bekannte Funktion und C' die noch näher zu bestimmende Integrationskonstante. Ebenso finden wir, wenn wir in (9) λ'' für λ setzen und

$$\frac{\lambda'' r_2}{r_1} = p''$$

nennen,

$$i_1 + p'' i_2 = g(t, C''), \qquad (12')$$

wobei g wieder eine bekannte Funktion und C'' die zu bestimmende Konstante ist. Die beiden Konstanten sind berechenbar, sobald wir i_1 und i_2 in irgendeinem Zeitpunkte kennen. Schließlich lassen sich aus den beiden Gleichungen (12) und (12') die zwei Unbekannten i_1 und i_2 für irgendeine beliebige Zeit t auswerten.

Wir wollen unsere Überlegungen auf den Fall anwenden, bei dem in beiden Stromkreisen zur Zeit $t = 0$ die elektromotorischen Kräfte momentan zu wirken aufhören. In diesem Augenblick seien die Stromstärken i_{1o} und i_{2o}. In unseren beiden Gleichungen haben wir dann für F_1 und F_2 Null zu setzen, damit geht (11) über in

$$i_1 + p' i_2 = -\frac{L_1 + \lambda' M}{r_1} \frac{d}{dt}(i_1 + p' i_2),$$

und eine entsprechende zweite Gleichung, in der λ'' und p'' statt λ' und p' steht. Die Lösungen sind

$$i_1 + p' i_2 = C' e^{-q' t}$$

und

$$i_1 + p'' i_2 = C'' e^{-q'' t},$$

wobei

$$q' = \frac{r_1}{L_1 + \lambda' M} \quad \text{und} \quad q'' = \frac{r_1}{L_1 + \lambda'' M}. \tag{13}$$

Bei Einführung der Grenzbedingungen für $t = 0$ ergibt sich

$$i_1 + p' i_2 = (i_{1o} + p' i_{2o}) e^{-q' t}$$
$$i_1 + p'' i_2 = (i_{1o} + p'' i_{2o}) e^{-q'' t},$$

woraus i_1 und i_2 als Funktion von t gefunden werden kann. Wegen der Faktoren $e^{-q' t}$ und $e^{-q'' t}$ werden wieder die Stromstärken nach Verlauf einiger Zeit unmerkbar klein geworden sein. Dazu ist allerdings notwendig, daß sowohl q' als auch q'' positive Größen sind, wovon wir uns jetzt überzeugen wollen.

Zu diesem Zwecke leiten wir aus (10) die quadratischen Gleichungen ab, denen q' und q'' genügen. Da diese Größen durch Gleichung (13) mit λ' und λ'' zusammenhängen, finden wir, wenn wir λ eliminieren aus (10) und aus

$$\frac{r_1}{q} = L_1 + \lambda M$$

die Gleichung

$$q^2 (L_1 L_2 - M^2) - q (r_1 L_2 + r_2 L_1) + r_1 r_2 = 0.$$

Da $L_1 L_2 - M^2$, r_1, r_2, L_1 und L_2 alle positiv sind, folgt, daß sowohl das Produkt der Wurzeln $q' q''$ als auch ihre Summe $q' + q''$ positiv ist, also sind beide Wurzeln positive Zahlen. (Daß sie beide reell sind, folgte bereits aus der Tatsache, daß beide Wurzeln von Gleichung (10) reell sind.)

Für jeden der beiden Stromkreise werden wir jetzt noch den gesamten Extrastrom berechnen. Dazu haben wir die Lösung der Differentialgleichung nicht nötig, wir müssen nur annehmen dürfen, daß nach unendlich langer Zeit beide Ströme Null geworden sind. Aus der ersten Gleichung (7) finden wir nämlich, da jetzt $F_1 = 0$ ist:

$$r_1 \int_0^\infty i_1 \, dt = - L_1 \int_0^\infty \frac{d i_1}{dt} dt - M \int_0^\infty \frac{d i_2}{dt} dt,$$

und somit

$$\int_0^\infty i_1 \, dt = \frac{L_1}{r_1} i_{1\,0} + \frac{M}{r_1} i_{2\,0},$$

aus der zweiten ergibt sich

$$\int_0^\infty i_2 \, dt = \frac{L_2}{r_2} i_{2\,0} + \frac{M}{r_2} i_{1\,0}.$$

Ganz analoge Betrachtungen wie wir sie hier durchführten, lassen sich auch anstellen, wenn gleichzeitig zwei Stromkreise geschlossen werden.

Unsere Gleichungen gelten speziell auch für einen Fall, der praktisch von Wichtigkeit ist, nämlich dann, wenn im zweiten Kreis keine elektromotorische Kraft vorhanden ist und im ersten nach Erreichen des stationären Zustandes die elektromotorische Kraft plötzlich zu wirken aufhört. In den obenstehenden Gleichungen ist dann nur $i_{2\,0} = 0$ zu setzen.

§ 4. Mehrere Stromkreise.

Wir wollen die gleichen Probleme jetzt für eine beliebige Anzahl von n Leitern behandeln. Aus Symmetriegründen werden wir die Selbstinduktionskoeffizienten dabei M_{11}, M_{22}, usf. nennen, die der Gegeninduktion $M_{hk} = M_{kh}$. Das System der Gleichungen lautet jetzt:

$$\left.\begin{aligned}
i_1 r_1 &= F_1 - M_{11}\frac{d i_1}{dt} - M_{12}\frac{d i_2}{dt} \cdots - M_{1n}\frac{d i_n}{dt} \\
i_2 r_2 &= F_2 - M_{21}\frac{d i_1}{dt} - M_{22}\frac{d i_2}{dt} \cdots - M_{2n}\frac{d i_n}{dt} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
i_n r_n &= F_n - M_{n1}\frac{d i_1}{dt} - M_{n2}\frac{d i_2}{dt} \cdots - M_{nn}\frac{d i_n}{dt}
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Wir behandeln die Gleichungen in derselben Weise, wie wir es für zwei Stromleiter getan haben. Wir erweitern die Gleichungen der Reihe nach mit λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_n$, addieren sie und erhalten:

$$i_1 r_1 \lambda_1 + i_2 r_2 \lambda_2 \cdots + i_n r_n \lambda_n = \Sigma F_k \lambda_k - \frac{d i_1}{dt} \Sigma M_{k1} \lambda_k -$$

$$- \frac{d i_2}{dt} \Sigma M_{k2} \lambda_k \cdots - \frac{d i_n}{dt} \Sigma M_{kn} \lambda_k. \qquad (15)$$

Wir suchen, λ so zu bestimmen, daß gilt:

$$\frac{\Sigma M_{k_1} \lambda_k}{r_1 \lambda_1} = \frac{\Sigma M_{k_2} \lambda_k}{r_2 \lambda_2} = \cdots = \frac{\Sigma M_{kn} \lambda_k}{r_n \lambda_n}. \tag{16}$$

Setzen wir jedes dieser Verhältnisse $= P$, so erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&(M_{11} - r_1 P)\lambda_1 + M_{21}\lambda_2 + M_{31}\lambda_3 \cdots + M_{n1}\lambda_n = 0\\
&M_{12}\lambda_1 + (M_{22} - r_2 P)\lambda_2 + M_{32}\lambda_3 \cdots + M_{n2}\lambda_n = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&M_{1n}\lambda_1 + M_{2n}\lambda_2 + M_{3n}\lambda_3 + \cdots + (M_{nn} - r_n P)\lambda_n = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

Hieraus folgt: soll noch ein anderes System von Wurzeln möglich sein als $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \lambda_n = 0$, so muß P der Gleichung genügen

$$\Delta = \begin{vmatrix}
M_{11} - r_1 P & M_{21} & M_{31} \cdots M_{n1}\\
M_{12} & M_{22} - r_2 P & M_{32} \cdots M_{n2}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
M_{1n} & M_{2n} & M_{3n} \cdots M_{nn} - r_n P
\end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung liefert uns n Werte für P, und jeder dieser Werte ergibt ein System von Werten für die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 \cdots : \lambda_n$, die den Gleichungen (16) und (16′) genügen. Jedes dieser Systeme ergibt bei Substitution in (15) eine Gleichung, die integriert werden kann; aus den n Differentialgleichungen lassen sich dann die n Unbekannten i_1, $i_2 \cdots i_n$ finden.

§ 5. Versuche über Extraströme.

Ein bekannter Versuch, um den Extrastrom experimentell zu zeigen, stammt von EDLUND und ist in der umstehenden Figur (17) schematisch dargestellt worden. In einem Stromkreis befindet sich bei E ein Element, das einen Strom von E nach A fließen läßt. A ist mit B durch zwei Zweige verbunden, die Stromstärken in beiden Zweigen können durch ein in G angebrachtes Differentialgalvanometer miteinander verglichen werden. Der Versuch ist nun so eingerichtet, daß die Zweige $A\ P\ B$ und $A\ Q\ B$ gleichen Widerstand aber eine verschieden große Selbstinduktion besitzen. Dies läßt sich erreichen, wenn man z. B. für den Draht $A\ P\ B$ ein Metall mit geringerem Widerstand pro Längeeinheit nimmt als für $A\ Q\ B$. Der Draht muß dann länger sein und der Kreis $E\ A\ P\ B$ wird eine größere Selbstinduktion besitzen als $E\ A\ Q\ B$. Der Unterschied läßt sich noch ver-

größern, wenn man den Draht $A\ P\ B$ spiralförmig aufwickelt. Wenn ein stationärer Zustand erreicht ist, werden die Stromstärken in beiden Zweigen gleich sein, und das Differentialgalvanometer zeigt keinen Ausschlag. Öffnet man nun den Kreis bei E, so entsteht in beiden Zweigen ein Extrastrom, aber der in $A\ P\ B$ ist größer als der in $A\ Q\ B$, und das Galvanometer zeigt einen Ausschlag in der Richtung, als ob der Widerstand in $A\ P\ B$ geringer sei. Schließt man den Kreis, so erfolgt der Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite.

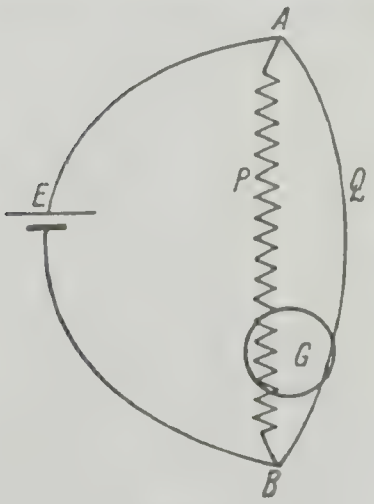

Fig. 17.

Auf eine andere Weise läßt sich die Wirkung der Selbstinduktion mit der bereits auf S. 127 besprochenen WHEATSTONEschen Brücke zeigen, die in Fig. 18 noch einmal schematisch aufgezeichnet ist. Die Buchstaben längs der Kurven bedeuten die Widerstände der einzelnen Drähte und die Stromstärken. Ist die Beziehung $r_1 : r_2 = r_3 : r_4$ erfüllt, so fließt im stationären Zustand kein Strom im Draht $C\ D$, und ein dort eingeschaltetes Galvanometer zeigt keinen Ausschlag. Hat aber der Zweig $A\ D$ eine größere Selbstinduktion als $A\ C$, so wird, wenn A mit dem positiven Pol des Elementes E verbunden ist, beim Öffnen des Stromkreises im Verbindungsdraht ein Strom in der Richtung $D\ C$ fließen und beim Schließen einer in der entgegengesetzten Richtung.

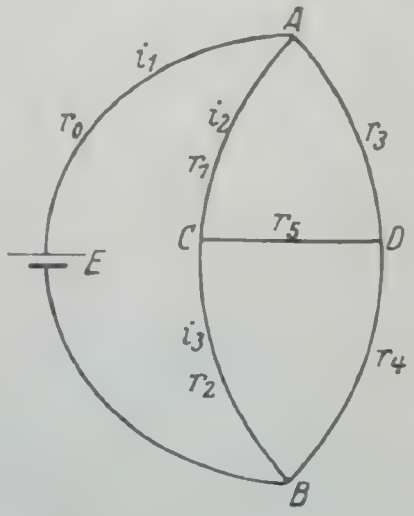

Fig. 18.

Die Theorie dieser Versuche müssen wir noch etwas eingehender besprechen. Bei der elementaren Überlegung, die wir soeben anstellten, sprachen wir von der Selbstinduktion eines bestimmten Drahtes, nach der Definition dürfen wir aber nur von der Selbstinduktion eines geschlossenen Kreises reden. Wir wollen jetzt ein ganz beliebiges Netz von Leitern betrachten, in dem an den verschiedensten Stellen elektromotorische Kräfte wirken, so wie wir es z. B. bei der Ableitung der KIRCHHOFFschen Gesetze angenommen

haben. Nach der Theorie, die wir jetzt betrachten wollen, können wir diesen Fall als eine Verallgemeinerung des damals behandelten auffassen.

Das Netz wollen wir jetzt in so viele voneinander unabhängige Kreise aufteilen, wie nötig sind, damit jeder Zweig mindestens in einem Kreis vorkommt. Für jeden Kreis setzen wir einen bestimmten Umlaufssinn als positiven fest und bestimmen in jedem die Stromstärke; liegt ein Zweig in mehreren Kreisen, so ist die wirkliche Stromstärke die algebraische Summe der Stromstärken in den verschiedenen Kreisen. Die Bedingung, daß in den Verzweigungspunkten zu jeder Zeit gleich viel Elektrizität zu- wie abströmt, ist dann von selbst erfüllt. Das zweite Kirchhoffsche Gesetz wird aber etwas modifiziert. Wenn wir längs eines Kreises das Linienintegral von Gleichung (2) auf S. 122 bilden, so finden wir dafür

$$\int \mathrm{E}_s \, ds + \int \mathrm{E}_{es} \, ds = \Sigma i r,$$

hierbei bezieht sich die Summe auf der rechten Seite der Gleichung auf die verschiedenen Zweige, aus denen der Kreis besteht, und für jeden Zweig muß die wirklich dort vorhandene Stromstärke in Rechnung gesetzt werden. Ferner ist nach der zweiten Hauptgleichung wieder

$$\int \mathrm{E}_s \, ds = -\frac{d}{dt} \int \mathrm{B}_n \, d\sigma,$$

und dieser Ausdruck ist nicht Null sondern hat einen Wert, den wir mit Hilfe der Koeffizienten für Selbstinduktion und Gegeninduktion nach dem früheren leicht ausrechnen können. Wir erhalten z. B. für den Kreis, dem wir den Index 1 gegeben haben

$$\Sigma i r = \Sigma F - M_{11} \frac{d i_1}{dt} - \cdots M_{1n} \frac{d i_n}{dt}$$

und Analoges für die anderen. Der Koeffizient M_{kl} z. B. bedeutet dabei die Anzahl magnetischer Kraftlinien, die der k^{te} Kreis umschließt, wenn im l^{ten} ein Strom von der Stärke 1 fließt und sonst kein anderer Strom das Feld bestimmt, was man sich jederzeit vorstellen kann.

Als Beispiel führen wir wieder die Wheatstonesche Brücke aus Fig. 18 an. Der erste Stromkreis sei $B\,E\,A\,D$, der zweite $A\,C\,D$, der dritte $C\,B\,D$, und überall sei die positive Umlaufsrichtung durch die Reihenfolge der Buchstaben angedeutet.

Die Gleichungen lauten:

$$i_1 r_o + (i_1 - i_2) r_3 + (i_1 - i_3) r_4 = \mathrm{F} - M_{11} \frac{d i_1}{d t} - M_{12} \frac{d i_2}{d t} - M_{13} \frac{d i_3}{d t}$$

$$(i_2 - i_1) r_3 + i_2 r_1 + (i_2 - i_3) r_5 = \quad - M_{21} \frac{d i_1}{d t} - M_{22} \frac{d i_2}{d t} - M_{23} \frac{d i_3}{d t}$$

$$(i_3 - i_1) r_4 + (i_3 - i_2) r_5 + i_3 r_2 = \quad - M_{31} \frac{d i_1}{d t} - M_{32} \frac{d i_2}{d t} - M_{33} \frac{d i_3}{d t},$$

wobei F die elektromotorische Kraft der Stromquelle bedeutet.

Diese Gleichungen können natürlich wieder nach der auf S. 154 und 155 angegebenen Methode behandelt werden. Wir wollen jedoch hier die Lösung von i_1, i_2 und i_3 als Funktion der Zeit t auf sich beruhen lassen und allein für jeden der drei Stromkreise den gesamten Extrastrom beim Öffnen der Kreise berechnen, oder besser gesagt, dann, wenn F plötzlich Null wird. Wir wollen für die gesamten Elektrizitätsmengen in den drei Extraströmen I_1, I_2 und I_3 schreiben, und für die Stromstärken im stationären Zustand, also vor der Unterbrechung i_{1o}, i_{2o}, i_{3o}. Nach Erweiterung der Gleichungen mit $d t$ und Integration von $t = 0$, d. h. von dem Augenblick an, wo F verschwindet, bis zu der Zeit, wo die Stromstärken unmerklich klein geworden sind, also theoretisch bis $t = \infty$, erhalten wir:

$$I_1 r_o + (I_1 - I_2) r_3 + (I_1 - I_3) r_4 = M_{11} i_{1o} + M_{12} i_{2o} + M_{13} i_{3o}$$
$$(I_2 - I_1) r_3 + I_2 r_1 + (I_2 - I_3) r_5 = M_{21} i_{1o} + M_{22} i_{2o} + M_{23} i_{3o}$$
$$(I_3 - I_1) r_4 + (I_3 - I_2) r_5 + I_3 r_2 = M_{31} i_{1o} + M_{32} i_{2o} + M_{33} i_{3o}.$$

Diese Gleichungen lassen sich nach I_1, I_2, I_3 auflösen. Durch den Zweig $C D$, in den wir uns ein Galvanometer gelegt denken, strömt eine Elektrizitätsmenge $I_2 - I_3$. Wir können jetzt ableiten, wie groß der Galvanometerausschlag sein wird, wobei wir so rechnen können, als ob die gesamte Elektrizitätsmenge $I_2 - I_3$ plötzlich durch das Galvanometer fließt. Dadurch haben wir ein Mittel in der Hand, das theoretische Resultat zahlenmäßig mit der Beobachtung zu vergleichen. Bei der üblichen Anordnung des Versuchs ergibt sich eine Vereinfachung, wenn die Beziehung $r_1 : r_2 = r_3 : r_4$ erfüllt und damit $i_{2o} = i_{3o}$ ist. Eine weitere große Vereinfachung läßt sich noch anbringen, wenn wir uns in den Zweig $A C$, der allein zum zweiten Kreis gehört, eine Spule eingeschaltet denken. Gegenüber M_{22} können dann nämlich alle übrigen Koeffizienten M vernachlässigt werden,

auch diejenigen, die durch den Kreis $A\,C\,D$ selbst noch sonst hereinkämen; ferner können wir den Selbstinduktionskoeffizienten der Spule so berechnen, als ob die Spule aus einer Anzahl lose nebeneinanderstehender Kreise bestände. Auf diese Weise kommen wir zu der gewöhnlichen, elementaren Erklärung.

§ 6. Stromkreise mit Kondensator.

Auch bei der Berechnung der Ladung und Entladung eines Kondensators muß der Selbstinduktion Rechnung getragen werden. Betrachten wir einen unverzweigten Stromkreis $A\,E\,B$ (Fig. 19), so haben wir den Satz vom Linienintegral der elektrischen Kraft auf den geschlossenen Weg $A\,E\,B\,A$ anzuwenden, um die Gleichung zu finden, die die Erscheinung beschreibt. In bezug auf den Integrationsweg zwischen den Kondensatorplatten wollen wir zur Vereinfachung annehmen, daß die elektrische Kraft stets durch den augenblicklichen Zustand bestimmt ist. Früher hatten wir nämlich für das Linienintegral über diese kurze Strecke den Wert e/C gefunden, wobei e die Ladung und C die Kapazität des Kondensators bedeutete (dabei hatten wir angenommen, daß die Kondensatorplatten einander parallel stehen und ihr Abstand klein im Vergleich zu ihren Dimensionen ist), die Ladung hatten wir dabei aber als konstant angesehen. Mit unserer vereinfachenden Annahme wollen wir jetzt dieselbe Gleichung benützen (was in allen Fällen, die realisiert werden können, erlaubt ist). An Stelle von Gleichung (5) erhalten wir nun:

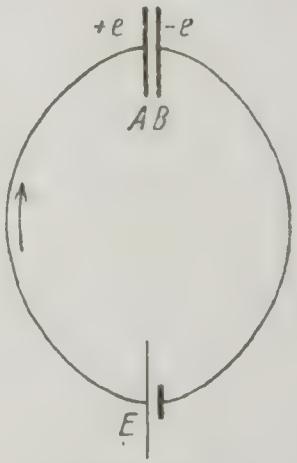

Fig. 19.

$$i\,r + \frac{\mathrm{e}}{C} = F - L \cdot \frac{d\,i}{d\,t} \tag{17}$$

während zwischen i und e die Beziehung besteht

$$i = \frac{d\,\mathrm{e}}{d\,t}.$$

Wir wollen jetzt die Entladung eines Kondensators untersuchen, wenn keine elektromotorische Kraft wirkt, und dabei zunächst zwei Grenzfälle ins Auge fassen:

1. die Selbstinduktion ist zu vernachlässigen; wir erhalten dann:

$$r\frac{de}{dt}+\frac{e}{C}=0,$$

also

$$e=e_0\,e^{-\frac{t}{rC}};$$

das ist das gleiche Resultat, das wir in Kap. III erhielten, die praktische Bedeutung ist, wie wir damals sahen, die, daß die Ladung nach kurzer Zeit unmerklich klein geworden ist.

2. Der Widerstand kann vernachlässigt werden. Unsere Gleichung wird:

$$\frac{e}{C}+L\frac{d^2e}{dt^2}=0$$

also:

$$e=A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t+a\right).$$

Wir erhalten einen periodischen Vorgang, bei dem die Schwingungsfrequenz $n=1/\sqrt{CL}$, also die Periode $T=2\pi\sqrt{CL}$ ist; T ist um so kleiner, je kleiner C und L sind. Die obige Gleichung liefert uns das Fundament der Theorie oszillierender Entladungen, die wir mutatis mutandis auf alle elektrischen Schwingungen anwenden können. Wir erhalten z. B. den Hertzschen Kondensator, wenn wir den bisher betrachteten Stromkreis systematisch verändern, also beginnen, die Kondensatorplatten so voneinander zu entfernen, wie es die oben stehende Fig. 20 angibt. Sind wir auf diese Weise zu zwei Platten oder zwei Kugeln gekommen, die durch einen Draht miteinander verbunden sind, so erhebt sich die Frage, wie wir die Enden auf verschiedene Potentiale aufladen können. Um dies auszuführen, denken wir uns den Verbindungsdraht unterbrochen. Wir haben dann eigentlich zwei Leiter A und B (Fig. 21). In den bekannten Versuchen entsteht, wenn wir a und b mit einem Induktorium verbinden, zwischen den beiden Leitern eine hohe Potentialdifferenz, und zwischen den

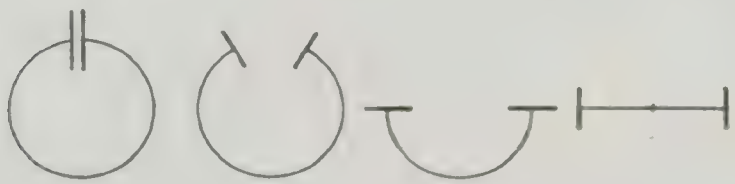

Fig. 20.

kugelförmigen Enden a und b springt ein Funke über; dieser jedoch macht die Luft im Zwischenraum leitend und wir erhalten wieder einen einzigen Leiter, in dem elektrische Schwingungen auftreten. Es ist jedoch schwer, hierbei die Schwingungszeit anzugeben. HERTZ wandte die obenstehende Gleichung an, mußte aber C und L abschätzen, was natürlich nur in grober Annäherung möglich ist. Die Gleichungen selbst, die von KELVIN aufgestellt wurden, haben jedoch durch die bekannten Versuche von FEDDERSEN eine experimentelle Stütze gefunden.

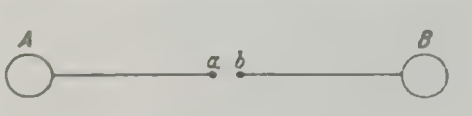

Fig. 21.

Wir gehen jetzt zu der Entladung eines Kondensators über, wenn sowohl der Widerstand als auch die Selbstinduktion des Verbindungsdrahtes berücksichtigt werden muß. Die Gleichung (17) ergibt:

$$i\,r + \frac{\mathrm{e}}{C} = -L\frac{di}{dt},$$

und nach Einsetzen von $i = \dfrac{d\,\mathrm{e}}{dt}$

$$\frac{d^2\,\mathrm{e}}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{d\,\mathrm{e}}{dt} + \frac{1}{LC}\mathrm{e} = 0. \tag{18}$$

Diese homogene, lineare Differentialgleichung wird erfüllt, wenn wir setzen $\mathrm{e} = A\,e^{-\varkappa t}$, wobei $\varkappa$ eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung ist:

$$\varkappa^2 - \frac{r}{L}\varkappa + \frac{1}{LC} = 0. \tag{19}$$

Offenbar müssen wir zwischen den zwei Fällen unterscheiden: $r^2 > 4\,L/C$ und $r^2 < 4\,L/C$. Im ersten Fall sind beide Wurzeln reell und, da r, L und C positive Koeffizienten sind, auch beide positiv, im zweiten Fall sind die Wurzeln konjugiert komplex. Nennen wir im ersten Fall die Wurzeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, so lautet die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\mathrm{e} = A\,e^{-\varkappa_1 t} + B\,e^{-\varkappa_2 t},$$

wobei die Konstanten A und B durch die vorgegebenen Werte von e und i zu Beginn des Versuches zu bestimmen sind. Wir finden also

wieder eine kontinuierlich abnehmende Ladung, die schnell unmeßbar klein wird.

Ist $r^2 < 4\,L/C$, so sind die beiden Wurzeln von (19) komplex, und wir können für sie schreiben: $q \pm n\,i$[1]), wobei $q = \frac{r}{2\,L}$ und $n = \frac{1}{2\,L\,C}\sqrt{C\,(4\,L - r^2\,C)}$ ist.

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\mathfrak{e} = A_1\,e^{(-q+in)t} + A_2\,e^{(-q-in)t} \tag{20}$$

oder in reelle Form gebracht (wobei andere Zeichen für die Integrationskonstanten nötig sind)

$$\mathfrak{e} = A\,e^{-qt}\cos\,(n\,t + \alpha) \tag{21}$$

Die Konstanten A und α sind natürlich wieder aus den gegebenen Anfangswerten von $\mathfrak{e}$ und $d\,\mathfrak{e}/d\,t$ bestimmbar.

Unser Resultat stellt gedämpfte Schwingungen dar, d. h. wir haben eine oszillierende Entladung mit abnehmender Amplitude, die außerordentlich schnell sehr klein wird.

Ist $r^2 = 4\,L/C$, so sind die beiden Wurzeln von (19) gleich und die allgemeine Lösung von (18) erhält die Form:

$$\mathfrak{e} = (A + B\,t)\,e^{-\varkappa t},$$

was wieder eine kontinuierlich zu Null abnehmende Ladung bedeutet.

§ 7. Stromkreise mit Kondensator und elektromotorischer Kraft.

Beim allgemeinen Fall, zu dem wir jetzt übergehen, liegt in dem Stromkreis noch eine elektromotorische Kraft, die ihrerseits als Funktion der Zeit gegeben ist. Die Lösung dieses Problems kommt auf die Integration der Gleichung (17) auf S. 159 heraus

$$L\frac{d^2\mathfrak{e}}{d\,t^2} + r\frac{d\,\mathfrak{e}}{d\,t} + \frac{\mathfrak{e}}{C} = F\,, \tag{22}$$

wobei F jetzt eine gegebene Funktion von t ist. Die Gleichung unterscheidet sich von der früheren allein dadurch, daß ihre rechte Seite nicht gleich Null ist. Die Lösung kann darum bekanntlich aus der ersten mit Hilfe der Methode der Variation der Parameter abgeleitet werden. Das heißt, man hat in (20) die Größen A_1 und A_2 als Funk-

[1]) Eine Verwechslung ist wohl nicht zu befürchten, wenn im folgenden i nicht mehr die Stromstärke sondern die imaginäre Einheit bedeutet.

tionen von t anzusehen und sie so zu bestimmen, daß nach der Substitution Gleichung (22) befriedigt wird. Dabei ist zu bemerken, daß alle diejenigen Terme, die keine Differentialquotienten von A_1 und A_2 enthalten, bei der Substitution herausfallen, da es ja die gleichen sind, die man erhält, wenn man in (20) A_1 und A_2 als konstant ansieht, und da die Lösung (20) die Gleichung (18) erfüllt. Wir haben also nur die Terme zu beachten, die Differentialquotienten von A_1 und A_2 enthalten. Wir erhalten eine Beziehung zwischen den beiden unbekannten Funktionen, indem wir ausdrücken, daß nach der Substitution die Differentialgleichung (22) erfüllt sein muß. Um A_1 und A_2 einzeln auszurechnen, können wir eine zweite Beziehung noch willkürlich wählen, und tuen das nun so, daß die Rechnung möglichst einfach wird. Durch einmalige Differentiation erhalten wir aus (20)

$$\frac{d\mathfrak{e}}{dt} = (-q + in)\, A_1\, e^{(-q+in)t} - (q + in)\, A_2\, e^{(-q-in)t} + \\ + e^{(-q+in)t}\frac{dA_1}{dt} + e^{(-q-in)t}\frac{dA_2}{dt};$$

unsere willkürliche Beziehung zwischen den Funktionen A_1 und A_2 wird sein:

$$e^{+int}\frac{dA_1}{dt} + e^{-int}\frac{dA_2}{dt} = 0 \qquad (23)$$

Eine zweite Differentiation ergibt

$$\frac{d^2\mathfrak{e}}{dt^2} = \cdots + (-q + in)\, e^{(-q+in)t}\frac{dA_1}{dt} - (q + in)\, e^{(-q-in)t}\frac{dA_2}{dt},$$

wobei diejenigen Terme, die bei der Substitution doch fortfallen, durch Punkte angedeutet sind. Die Substitution in (22) ergibt jetzt

$$(-q + in)\, e^{int}\frac{dA_1}{dt} - (q + in)\, e^{-int}\frac{dA_2}{dt} = \frac{F}{L}e^{qt}. \qquad (24)$$

Wir lösen zunächst (23) und (24) nach $\frac{dA_1}{dt}$ und $\frac{dA_2}{dt}$ auf

$$2in\, e^{int}\frac{dA_1}{dt} = \frac{F}{L}e^{qt},$$

$$2in\, e^{-int}\frac{dA_2}{dt} = -\frac{F}{L}e^{qt},$$

hieraus folgt:

$$A_1 = -\frac{i}{2nL}\int e^{(q-in)t} F\,dt$$

$$A_2 = +\frac{i}{2nL}\int e^{(q-in)t} F\,dt.$$

Setzen wir dieses Resultat in (20) ein, so erhalten wir einen Ausdruck, der Gleichung (22) erfüllt, und dies ist die allgemeine Lösung, da sie zwei voneinander unabhängige Konstanten enthält. (Diese beiden Konstanten kommen durch die letzte Integration in die Lösung.) Durch die Konstanten treten Terme der gleichen Form wie in Gleichung (20) in der ursprünglichen Bedeutung auf, sie können also wieder in die Form (21) überführt werden. Ferner zeigt sich, daß noch eine Summe zweier konjugiert komplexer Terme hinzukommt, die also wieder als reelle Größe aufgeschrieben werden kann; in diesem Ausdruck ist dann F enthalten. Die interessanteste Anwendung dieser Berechnung ergibt sich, wenn wir F als eine periodische Funktion der Zeit annehmen. Das Problem entspricht dann vollständig dem mechanischen einer erzwungenen Schwingung. Es sei z. B.

$$F = a\cos mt.$$

Um die Berechnungen einfacher zu gestalten, schreiben wir $F = a\,e^{imt}$ und berücksichtigen zum Schluß nur den reellen Teil des Resultates. Wir erhalten dann

$$A_1 = -\frac{a\,i}{2nL}\,\frac{1}{q+i(m-n)}\,e^{[q+i(m-n)]t} + C_1,$$

$$A_2 = \frac{a\,i}{2nL}\,\frac{1}{q+i(m+n)}\,e^{[q+i(m+n)]t} + C_2$$

und haben den reellen Teil zu bestimmen von

$$\frac{a\,i}{2nL}\left\{\frac{1}{q+i(m+n)} - \frac{1}{q+i(m-n)}\right\} e^{imt},$$

dieser ist

$$\frac{a}{L}\,\frac{(q^2+n^2-m^2)\cos mt + 2qm\sin mt}{(q^2+n^2-m^2)^2 + 4q^2m^2}.$$

Wir setzen für q und n zunächst ihre Werte ein: $q = \frac{r}{2L}$, $n = \frac{1}{2LC}\sqrt{C(4L - r^2C)}$, woraus folgt $q^2 + n^2 = \frac{1}{CL}$. (Dieses

letzte Resultat hätten wir auch direkt aufschreiben können, da $q^2 + n^2$ das Produkt der Wurzeln von (19) ist). Dies eingesetzt ergibt

$$\frac{a}{L}\frac{\left(\frac{1}{LC}-m^2\right)\cos m\,t}{\left(\frac{1}{LC}-m^2\right)^2+\frac{r^2m^2}{L^2}}+\frac{a}{L}\frac{\frac{rm}{L}\sin m\,t}{\left(\frac{1}{LC}-m^2\right)^2+\frac{r^2m^2}{L^2}}.$$

Fügen wir jetzt noch die Terme mit den unbestimmten Konstanten hinzu, so können wir für unseren Fall die vollständige Lösung von (22) in die Form bringen

$$e = A\,e^{-qt}\cos(n\,t+\alpha)+\frac{a}{\varrho}\cos(m\,t-p), \tag{25}$$

wobei gesetzt ist

$$\frac{1}{\varrho}\cos p=\frac{1}{L}\frac{\frac{1}{LC}-m^2}{\left(\frac{1}{LC}-m^2\right)^2+\frac{r^2m^2}{L^2}};\quad \frac{1}{\varrho}\sin p=\frac{1}{L}\frac{\frac{rm}{L}}{\left(\frac{1}{LC}-m^2\right)^2+\frac{r^2m^2}{L^2}},$$

oder

$$\varrho^2=\left(\frac{1}{C}-Lm^2\right)^2+r^2m^2,\quad \operatorname{tg}p=\frac{rm}{1/C-Lm^2}.$$

Der erste Term der rechten Seite von (25) zeigt eine oszillierende Entladung an, so wie sie als sog. „freie" Schwingung des Systems bestehen würde, wenn keine elektromotorische Kraft wirksam wäre. Durch den Faktor e^{-qt} klingt diese sehr schnell ab, und es bleibt eine periodische Strombewegung über, eine „erzwungene" Schwingung, die unabhängig von der eventuell ursprünglich vorhandenen Ladung ist. Die Periode der erzwungenen Schwingung ist die gleiche wie die der gegebenen elektromotorischen Kraft. Die Amplitude hängt von der Größe ϱ ab, die hier die Rolle eines Widerstandes spielt; die Amplitude ist groß, wenn ϱ klein ist. Damit dies eintreten kann, muß zunächst r klein sein. Verschwindet r gegen Null, so nähert sich die Phasenverschiebung zwischen elektromotorischer Kraft und erzwungener Schwingung — hier dargestellt durch p — dem Werte Null oder π, je nachdem m^2 kleiner oder größer als $1/LC$ ist. Ferner wird ϱ um so kleiner, je geringer die Differenz von m und $1/\sqrt{LC}$ ist, wobei $1/\sqrt{LC}$, wie wir sahen, die Eigenfrequenz des Systems bedeutet. Wir finden also auch hier wieder den aus der

Theorie mechanischer erzwungener Schwingungen wohlbekannten Satz bestätigt, daß die Schwingungsamplitude um so größer ist, je mehr die Periode der äußeren Kraft und die der Eigenschwingung einander gleichen.

Sind r und L gegeben, so läßt sich ϱ klein machen, wenn man die Größe $(1/C - L\,m^2)^2$ klein macht. Daraus folgt, daß es vorteilhaft sein kann, um bei gegebenen Wechselspannungen starke Wechselströme zu erzielen, einen Kondensator in den Stromkreis aufzunehmen.

§ 8. Zwei Stromkreise.

Wir wollen nun noch zwei Stromkreise betrachten; jeder enthalte einen Kondensator, und in dem einen Stromkreis sei überdies eine elektromotorische Kraft enthalten, die als Funktion der Zeit gegeben ist. Drücken wir die Stromstärken mit Hilfe der Ladungen der Kondensatoren aus, so lauten die Gleichungen, wenn wir wieder die Kreise durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden:

$$\begin{aligned} r_1 \frac{d\,\mathfrak{e}_1}{d\,t} &= F - L_1 \frac{d^2\,\mathfrak{e}_1}{d\,t^2} - M \frac{d^2\,\mathfrak{e}_2}{d\,t^2} - \frac{\mathfrak{e}_1}{C_1} \\ r_2 \frac{d\,\mathfrak{e}_2}{d\,t} &= \quad - L_2 \frac{d^2\,\mathfrak{e}_2}{d\,t^2} - M \frac{d^2\,\mathfrak{e}_1}{d\,t^2} - \frac{\mathfrak{e}_2}{C_2} \end{aligned} \tag{26}$$

Wir wollen die Gleichungen lösen für den Fall, daß F eine einfache periodische Funktion ist, $F = a \cos m\,t$. Zur Lösung schlagen wir einen etwas anderen Weg als oben ein, jedoch werden wir wieder mit Exponentialfunktionen arbeiten. Wir ersetzen also F durch $F' = a\,e^{i\,m\,t}$, und versehen die Größen, die bei der Rechnung auftreten, mit Akzenten. $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$, die Größen, die wir suchen, sind dann die reellen Teile von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$.

Der Ansatz, mit dem wir in die Gleichungen (26) eingehen, ist

$$\mathfrak{e}'_1 = q_1\,e^{i\,m\,t}, \quad \mathfrak{e}'_2 = q_2\,e^{i\,m\,t},$$

wobei q_1 und q_2 noch passend gewählt werden müssen. Die Substitution ergibt nach Division durch den Faktor $e^{i\,m\,t}$

$$\begin{aligned} m\,q_1\,r_1\,i &= a + L_1\,q_1\,m^2 + M\,q_2\,m^2 - \frac{q_1}{C_1} \\ m\,q_2\,r_2\,i &= \quad\; L_2\,q_2\,m^2 + M\,q_1\,m^2 - \frac{q_2}{C_2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht nach q_1 und q_2 auflösen. Beide Größen werden im allgemeinen komplex sein, wir setzen

$$q_1 = \alpha_1 e^{i\beta_1}, \quad q_2 = \alpha_2 e^{i\beta_2}$$

und erhalten daraus

$$e'_1 = \alpha_1 e^{i(mt+\beta_1)}, \quad e'_2 = \alpha_2 e^{i(mt+\beta_2)},$$

und somit

$$e_1 = \alpha_1 \cos(mt+\beta_1), \quad e_2 = \alpha_2 \cos(mt+\beta_2). \tag{27}$$

Um die vollständige Lösung zu erhalten, haben wir noch die Terme zuzufügen, die dem Gleichungssystem für $F = 0$ genügen, denn es ist ohne weiteres klar, daß die Substitution nach Hinzufügen dieser Terme dann (26) ebenfalls identisch erfüllt. Auch die physikalische Bedeutung liegt auf der Hand. Die bereits gefundenen Terme geben die erzwungenen Schwingungen wieder, die den beiden Kreisen durch die gegebene elektromotorische Kraft aufgedrückt wird, die noch zu bestimmenden Terme müssen die freien Schwingungen bedeuten, die in den Kreisen entstehen, falls zu Beginn von Null verschiedene Ladungen vorhanden waren. Wir setzen, um sie zu berechnen, $e''_1 = p_1 e^{\varkappa t}$, $e''_2 = p_2 e^{\varkappa t}$, wobei p_1, p_2 und $\varkappa$ noch bestimmt werden müssen. Einsetzen in die Gleichungen (26) mit $F = 0$ ergibt (nach Division durch $e^{\varkappa t}$)

$$\begin{aligned} r_1 p_1 \varkappa + L_1 p_1 \varkappa^2 + M p_2 \varkappa^2 + \frac{p_1}{C_1} = 0 \\ r_2 p_2 \varkappa + L_2 p_2 \varkappa^2 + M p_1 \varkappa^2 + \frac{p_2}{C_2} = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Diese zwei Gleichungen können uns natürlich nicht $\varkappa$, p_1 und p_2 einzeln geben, wir können aber $\varkappa$ und p_1/p_2 daraus finden, wie auch zu erwarten ist; denn wenn wir ein Wertepaar e''_1 und e''_2 als Lösung gefunden haben, so können wir immer ein neues erhalten, wenn wir beide Größen mit derselben Konstanten multiplizieren. Durch Elimination von p_1/p_2 erhalten wir

$$\left(L_1 \varkappa^2 + r_1 \varkappa + \frac{1}{C_1}\right)\left(L_2 \varkappa^2 + r_2 \varkappa + \frac{1}{C_2}\right) = M^2 \varkappa^4, \tag{29}$$

eine Gleichung vierten Grades für $\varkappa$. Zu jeder der vier Wurzeln von $\varkappa$ liefert (28) das zugehörige p_2/p_1. Nehmen wir dann z. B. p_1 willkürlich an, so ist damit p_2 gegeben; in jeder der Gleichungen (27) sind also

vier Terme zuzufügen, und damit werden vier unbestimmte Konstanten eingeführt. Die gegebenen Anfangswerte

$$e_1, \frac{de_1}{dt}, e_2, \frac{de_2}{dt}$$

liefern auch gerade die vier Beziehungen, die die Bestimmung ermöglichen.

Sind unter den Wurzeln von (29) reelle vorhanden, so müssen diese notwendig negativ sein, und die ihnen entsprechenden Terme stellen eine aperiodisch abnehmende Ladung dar, die zeitlich schnell abklingt. Anderenfalls sind von den Wurzeln von (29) je zwei und zwei konjugiert komplex und ihre reellen Teile wieder negativ, und sie bedeuten eine oszillierende Entladung mit abnehmender Amplitude. Nennen wir diese vier komplexen Wurzeln

$$-s_1 \pm i n_1 \text{ und } -s_2 \pm i n_2$$

und berücksichtigen, daß den konjugiert komplexen Werten von $\varkappa$ auch konjugiert komplexe Werte von p_2/p_1 entsprechen, nämlich $\sigma_1 e^{\pm i\delta_1}$ und $\sigma_2 e^{\pm i\delta_2}$, so können wir die vollständige Lösung von (26) in die Form bringen

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1 \cos(m t + \beta_1) + c_1 e^{-s_1 t} \cos(n_1 t + \gamma_1) + \\ &\quad + c_2 e^{-s_2 t} \cos(n_2 t + \gamma_2) \\ e_2 &= \alpha_2 \cos(m t + \beta_2) + \sigma_1 c_1 e^{-s_1 t} \cos(n_1 t + \gamma_1 + \delta_1) + \\ &\quad + \sigma_2 c_2 e^{-s_2 t} \cos(n_2 t + \gamma_2 + \delta_2). \end{aligned}$$

In analoger Weise ließe sich das Problem von k Stromkreisen behandeln, in deren jeden ein Kondensator geschaltet ist, und die alle elektromotorische Kräfte besitzen.

§ 9. Der Einfluß der Drahtdicke auf den Selbstinduktionskoeffizienten.

Bis jetzt hatten wir die Drähte, die unsere Stromleiter waren, als linienförmig angesehen. Die Drahtdicke kann jedoch auf den Selbstinduktionskoeffizienten von Einfluß sein. Denn dieser bedeutet das Oberflächenintegral der magnetischen Induktion, genommen über eine Fläche, deren Begrenzung der Leitungsdraht bildet, falls ein Strom von der Stärke 1 im Kreis fließt. Besitzt aber der Draht eine merkliche Dicke, so hat das bezüglich der Integrationsfläche eine Unsicherheit zur Folge. Wohl ist das Gebiet, über das sich die Unsicherheit erstreckt, für einen dünnen Draht nur klein, da aber gerade dicht am Draht die

magnetische Induktion groß ist, so kann doch für das Resultat ein merklicher Fehler entstehen.

Für den Koeffizienten der Gegeninduktion ist die Unsicherheit nicht so groß, außer wenn die beiden in Frage stehenden Drähte sehr nahe beieinander liegen. Denn wir haben das Oberflächenintegral der magnetischen Induktion zu bilden, die durch den Strom 1 im anderen Kreis hervorgerufen wird, und diese magnetische Induktion wird in dem Unsicherheitsgebiet im allgemeinen keinen besonders großen Wert besitzen.

§ 10. Berechnung des Magnetfeldes in einfachen Fällen.

Um die Koeffizienten der Selbstinduktion und der Gegeninduktion in Einzelfällen zu bestimmen, muß das magnetische Feld bekannt sein, das ein bestimmter Strom in der Umgebung eines gegebenen Leiters hervorruft. Diese Kenntnis läßt sich stets mit Hilfe der Sätze erwerben, die wir im ersten Kapitel besprochen haben, und wir wollen jetzt einige Spezialfälle untersuchen.

Wir betrachten als erstes eine gerade Spule und beschränken uns zunächst auf Luft als Medium in und außerhalb der Spule. Liegen die Windungen sehr dicht nebeneinander, so läßt sich die Spule durch eine Anzahl kreisförmiger Windungen ersetzen, deren jede vom gleichen Strom i und im gleichen Sinne durchflossen wird wie die Spule. Um die magnetische Wirkung auf einen Punkt außerhalb der Spule zu berechnen, können wir jeden Drahtkreis durch eine magnetische Doppelschicht ersetzen, und als deren Dicke δ den Abstand zweier Windungen wählen. (Allerdings muß dieser Abstand sehr klein sein). Die Richtung von der südmagnetischen nach der nordmagnetischen Lage ist durch die Stromrichtung bestimmt, die Stärke der magnetischen Belegungen ist i/δ, wenn wir elektromagnetische Einheiten anwenden. Da nun die Dicke jeder magnetischen Doppellage gleich dem Abstand zweier aufeinanderfolgender Windungen ist, so wird die Wirkung einer nordmagnetischen Schicht überall vollständig durch diejenige der mit ihr zusammenfallenden südmagnetischen aufgehoben, und es bleiben schließlich nur die magnetischen Belegungen $\pm i/\delta$ der beiden Spulenenden übrig.

Für Punkte innerhalb der Spule kann dieses Resultat nicht richtig sein. Denn sonst müßte die magnetische Kraft beim Durchgang durch eine der Endflächen einen Sprung machen. Man kann aber

leicht sehen, wo in der obenstehenden Überlegung ein Schluß gezogen ist, der für Punkte innerhalb der Spule nicht mehr gültig ist. Die Äquivalenz eines Stromkreises mit einer magnetischen Doppelschicht gilt nämlich nur für Punkte außerhalb der Schicht. Wollen wir also die magnetische Kraft in einem Punkt P innerhalb der Spule (siehe Fig. 22) bestimmen, so haben wir die magnetischen Doppelschichten so anzubringen, daß P außerhalb jeder Schicht liegt, und die zwei Schichten mit entgegengesetzter Belegung zu beiden Seiten von P heben sich in ihrer Wirkung nun nicht mehr auf. Alle übrigen Überlegungen bleiben gültig, und wir haben, um die magnetische Kraft in P zu berechnen, außer den Belegungen auf den Endflächen nur noch diejenigen auf den Flächen $U\ V$ und $X\ Y$ zu berücksichtigen und zum Schluß den Grenzübergang zu vollziehen, wenn $U\ V$ und $X\ Y$ unendlich nahe aneinander rücken. Die Richtung der Kräfte, die die Belegungen auf diesen letzteren Flächen ausüben, nähert sich der Richtung der Spulenachse, dasselbe gilt darum auch für die Resultierende. Für ihre Größe finden wir nach Kap. I z. B. für die Kraft, die die magnetische Ladung in $U\ V$ auf P ausübt:

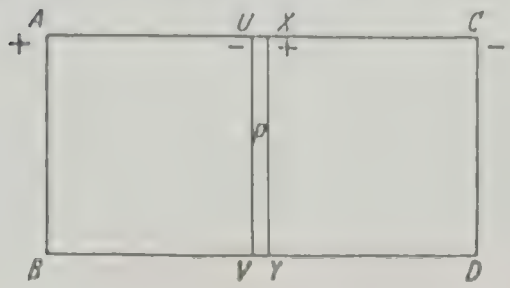

Fig. 22.

$$\text{Kegelöffnung } (P,\ U\ V) \times \frac{i}{\delta}.$$

In der Grenze wird die Kegelöffnung $2\,\pi$. Für die Gesamtkraft als Folge beider Belegungen auf $U\ V$ und auf $X\ Y$ erhalten wir, da beide Kräfte in Richtung der Spulenachse wirken und außerdem gleichen Richtungssinn (nach links) haben: $4\,\pi\,\frac{i}{\delta}$. Für δ, den Abstand zweier Windungen, können wir noch die Anzahl n der Windungen pro Längeneinheit einführen, dann ist $\delta\,n = 1$, und der oben stehende Ausdruck geht über in $4\,\pi\,i\,n$.

Ist die Spule sehr lang im Vergleich zu ihrem Durchmesser, so läßt sich bei der Berechnung des ersten Teiles der magnetischen Kraft, falls der betrachtete Punkt nicht sehr nahe an einer Endfläche liegt, die magnetische Belegung auf jeder Endfläche in einen Punkt konzentriert denken, mit anderen Worten, wir können den Abstand des

betrachteten Punktes von den einzelnen Punkten der Endfläche als konstant ansehen. Nennen wir den Abstand des Punktes von den beiden Endflächen r_1 und r_2 und den Spulenquerschnitt s, so wird die magnetische Kraft für einen Punkt außerhalb der Spule die Resultante der zwei Vektoren $\frac{i\,n\,s}{r_1^2}$ und $\frac{i\,n\,s}{r_2^2}$, deren Richtungen in die Verbindungsgeraden des betrachteten Punktes mit den Polen fallen.

Für einen Punkt in der Spule kommt dazu noch der Term $4\,\pi\,i\,n$, und da r_1^2 und r_2^2 groß im Vergleich zu s sind (falls unser Punkt nicht in unmittelbarer Nähe eines Spulenendes liegt), werden die Terme $\frac{i\,n\,s}{r_1^2}$ und $\frac{i\,n\,s}{r_2^2}$ wenig ausmachen; wir können darum das Feld im größten Teil der Spule als homogen ansehen. Die Richtung der Kraftlinien fällt mit der Spulenachse zusammen, und die Feldstärke beträgt $4\,\pi\,n\,i$.

Wenn wir annehmen, daß das Feld im Innern der Spule homogen ist und daß das äußere Feld zu vernachlässigen ist (da ja im äußeren Raum nur die Terme in Betracht kommen, die in einigem Abstand von den Spulenenden viel kleiner als $4\,\pi\,n\,i$ sind), so läßt sich unser obiges Resultat sehr einfach aus dem Satz des Linienintegrals der magnetischen Kraft ableiten. Die allgemeine Gleichung (in elektromagnetischen Einheiten)

$$\int \mathrm{H}_s\,d\,s = 4\,\pi \int \mathrm{C}_n\,d\,\sigma$$

können wir nämlich so auswerten, daß wir als Integrationsweg eine Gerade durch die Spule parallel zur Achse nehmen und diese Gerade außen irgendwie schließen. Allein der erste Teil liefert für das Integral auf der linken Seite der Gleichung einen Beitrag, und zwar, wenn l die Spulenlänge und H die gesuchte Feldstärke ist, den Beitrag $H\,l$. Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung gibt die Elektrizitätsmenge an, die in der Zeiteinheit durch eine Fläche strömt, deren Umrandung der Integrationsweg ist. Jede der $n\,l$ Windungen, von denen jede die Fläche einmal durchschneidet, liefert den Beitrag i, also wird der Wert des ganzen Integrals $n\,l\,i$. Hieraus folgt also direkt

$$H = 4\,\pi\,n\,i.$$

Diese Betrachtungen gelten sowohl, wenn sich Luft, als auch wenn sich ein Eisenkern in der Spule befindet. Die magnetische Induktion,

— und auf diese kommt es uns an — ist im zweiten Fall μ mal größer als im ersten.

Noch eine Anmerkung sei zu den obigen Ausführungen gemacht. s_1 sei die Richtung, die wir innerhalb der Windungen für den Strom als positive gewählt haben, s_2 die positive Richtung des Weges, längs welchem $\int H_s \, d\,s$ gemessen wurde, und innerhalb der Spule mögen s_1 und s_2 nach unseren Richtungsdefinitionen einander entsprechen. Wandert man nun längs einer Windung in der Richtung s_1, so entspricht dieser Weg auch der positiven Richtung in bezug auf den geschlossenen Integrationsweg s_2. Daraus folgt, daß die für H gefundene Gleichung auch in bezug auf die algebraischen Vorzeichen richtig ist, und weiter, was wir schon vorher wußten, daß die magnetische Kraft in der Spule die unseren Definitionen entsprechende Richtung in bezug auf den Strom in den Windungen besitzt.

Die erhaltenen Resultate ermöglichen nun, den Selbstinduktionskoeffizienten einer Spule zu berechnen. Ist wieder l die Spulenlänge und n die Windungszahl pro Längeneinheit, so kann man, wenn l sehr groß im Vergleich zum Durchmesser der Spule ist, das Feld im ganzen Innenraum als homogen ansehen, und zwar

$$\mathrm{H} = 4\,\pi\,n\,i;$$

darum ist, wenn die Spule mit einer Substanz von der Permeabilität μ gefüllt ist, die magnetische Induktion

$$\mathrm{B} = 4\,\pi\,\mu\,n\,i,$$

ebenfalls in Richtung der Achse gelegen. Ist S die Fläche einer Windung, so beträgt die Anzahl der Induktionslinien, die eine Windung durchschneiden $4\,\pi\,\mu\,n\,S\,i$, und die Anzahl, die die $n\,l$ Windungen schneiden

$$4\,\pi\,\mu\,n^2\,l\,S\,i.$$

Hieraus folgt für den Selbstinduktionskoeffizienten

$$L = 4\,\pi\,\mu\,n^2\,l\,S.$$

Bei der Stromstärke i beträgt also die Energie

$$\tfrac{1}{2}\,L\,i^2 = 2\,\pi\,\mu\,n^2\,l\,S\,i^2.$$

Da man vom Feld außerhalb der Spule absehen kann, und da das Feld im Innern homogen ist, so kann man die gesamte Energie gleichmäßig über den Raum $l\,S$ verteilt denken.

Im magnetischen Feld besteht also eine Energie pro Volumeinheit von

$$2\,\pi\,\mu\,n^2\,i^2,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{H}^2\,\mu = \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{B\,H}. \tag{30}$$

Da offenbar der Zustand in einem bestimmten Punkt vollständig durch H bestimmt ist, so ist man übereingekommen, diesen letzten Ausdruck in jedem magnetischen Feld, auch wenn dasselbe nicht homogen ist, als Energie der Volumeneinheit anzunehmen. Und es läßt sich in der Tat auf diese Weise über alle Werte Rechenschaft geben, die wir in § 1 und § 3 für die magnetische Energie gefunden haben.

Wir haben hier die gewöhnlichen elektromagnetischen Einheiten benützt. Alle Rechnungen lassen sich selbstverständlich mit anderen Einheiten wiederholen; wenn wir z. B. die auf S. 74 unter *D* behandelten Einheiten wählen, finden wir für die Energie pro Volumeinheit

$$\frac{1}{2}\,\mu\,\mathrm{H}^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{B\,H} = \frac{1}{2\,\mu}\,\mathrm{B}^2 \tag{31}$$

(also für den Äther $\frac{1}{2}\,\mathrm{H}^2$), Ausdrücke, die eine analoge Form wie die früher (S. 102) für die elektrische Energie gefundenen haben.

Man kann übrigens die Ausdrücke (31) auch aus (30) ableiten, wenn man bedenkt, daß sowohl H als auch B als die Kräfte definiert sind (S. 53 und 59), die auf den Einheitspol wirken. Geht man von den gewöhnlichen elektromagnetischen Einheiten zu den auf S. 74 unter *D* genannten über, so wird die Stärke des Einheitspoles $\sqrt{4\,\pi}$ mal kleiner. Dasselbe gilt auch für die auf den Einheitspol wirkende Kraft, d. h. für die Zahlenwerte von H und B (woraus folgt, daß μ unverändert bleibt).

§ 11. Ringförmige Spule.

In ganz gleicher Weise wie bei der geraden Spule können wir auch das Feld bestimmen, den ein Strom in einer zu einem Ring zusammen gebogener Spule hervorruft. Wir behandeln zunächst wieder den Fall, bei dem keine magnetisierbaren Körper vorhanden sind und nehmen ferner an, die Dicke des Ringes sei klein im Vergleich zu seinen übrigen Abmessungen. Aus den gleichen Gründen,

die im vorigen Paragraphen besprochen wurden, folgt, daß außerhalb des Ringes keine magnetische Kraft vorhanden ist. Im Ring ist sie überall konstant, und die magnetischen Kraftlinien sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der Ringachse liegen. Für die Feldstärke folgt wieder aus dem Satz über das Linienintegral der magnetischen Kraft

$$H = 4\,\pi\,n\,i,$$

wenn n die Windungszahl pro Längeneinheit bedeutet.

Die Bedingung der Stetigkeit der Tangentialkomponente von H ist an der Ringoberfläche scheinbar nicht erfüllt, da außerhalb des Ringes in der Luft H = 0 ist. Jedoch liegt dazwischen das Metall des Leitungsdrahtes, durch den der Strom fließt.

Betrachten wir nun weiter einen kreisförmigen Ring aus Weicheisen, um den in gleicher Weise die Windungen gelegt sind, so sehen wir, daß alle obigen Betrachtungen gültig bleiben, und für die Größe der magnetischen Induktion ergibt sich

$$B = 4\,\pi\,\mu\,i\,n.$$

Wegen des großen Wertes von μ wird die Selbstinduktion für eine solche Wicklung sehr groß.

Jetzt möge der Ring aus Weicheisen nur zum Teil von Drahtwindungen umgeben sein, die gesamte Windungszahl sei N. Der große Wert des Koeffizienten μ bewirkt, daß von den magnetischen Induktionslinien, die in gewissen Teilen des Ringes im Eisen verlaufen, nur sehr wenige nach außen gelangen. Die magnetischen Induktionslinien sind also immer noch in Annäherung Kreise. Aus dem solenoidalen Charakter von B folgt dann weiter, daß überall längs eines Kreises die magnetische Induktion einen konstanten Wert besitzt. Das gleiche gilt auch für die magnetische Kraft, und, wenn O der Umfang unseres Ringes ist, ergibt der Satz vom Linienintegral

$$H\,O = 4\,\pi\,i\,N,$$

also

$$B = \frac{4\,\pi\,i\,N\,\mu}{O}.$$

Das gleiche Problem wollen wir jetzt noch behandeln, wenn der Weicheisenkern eine kleine Lücke $a\,b$ aufweist (s. Fig. 23). Es sei $a\,b = l$ und der übrige Teil des Umfanges $= O'$, also der Gesamtumfang $O' + l = O$. Ist $a\,b$ sehr klein, so darf man die magnetischen

Induktionslinien immer noch als kreisförmig ansehen; die magnetische Induktion längs eines solchen Kreises ist dann wieder konstant und hat in dem engen Luftspalt auch den gleichen Wert wie im Eisen, da die Flächen a und b senkrecht auf den Induktionslinien stehen und die Normalkomponente der magnetischen Induktion stetig sein muß. Der Satz vom Linienintegral der magnetischen Kraft ergibt jetzt

$$\frac{B}{\mu} O' + B l = 4 \pi i N$$

und

$$B = \frac{4 \pi i N \mu}{O + l (\mu - 1)}.$$

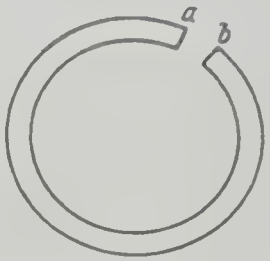

Fig. 23.

Da für Eisen μ eine große Zahl ist (größer als 300), so folgt aus der Gleichung, daß die magnetische Induktion im Kern durch die Anwesenheit eines nur kleinen Luftspaltes schon wesentlich verkleinert wird. Ebenso gibt die Gleichung Rechenschaft über die bekannte Erscheinung, daß das Feld zwischen den Polen eines gewöhnlichen, hufeisenförmigen Elektromagneten sehr stark wächst, wenn man die Pole näher aneinander bringt.

§ 12. Die Gegeninduktion zwischen den Spulen eines Induktoriums.

Als letztes Beispiel dieser Art wollen wir den Koeffizienten der Gegeninduktion zwischen den Spulen eines Induktoriums behandeln. N sei die Anzahl der Windungen der Primärspule, deren Länge l wieder sehr groß sei. Außerhalb der Spule setzen wir wie früher überall $H = 0$ und innerhalb der Spule $H = \text{const.}$, dann ergibt der Satz vom Linienintegral

$$H l = 4 \pi i N,$$

und im Weicheisenkern ist

$$B = 4 \pi \mu i \frac{N}{l}.$$

Der gesuchte Koeffizient der Gegeninduktion ist das Oberflächenintegral der magnetischen Induktion, erstreckt über eine Fläche, deren Begrenzung die zweite Spule bildet. Besitzt diese nun N' Windungen, so können wir die Fläche in N' Scheiben zerlegt denken und uns wegen des großen Wertes von μ bei jeder einzelnen Scheibe

auf den Teil beschränken, der im Eisenkern liegt. Ist also O der Querschnitt des Kernes, so ergibt das Oberflächenintegral im ganzen

$$4\pi\mu i\frac{NN'}{l}O,$$

und somit ist der gesuchte Koeffizient der Gegeninduktion

$$4\pi\mu\frac{NN'}{l}O.$$

§ 13. Die Induktion bei Bewegung von Leitern.

Wir haben bisher nur Induktionsströme betrachtet, bei denen das sie erzeugende, veränderliche, Magnetfeld durch Veränderung der Stromstärke in einem ruhenden Leitersystem hervorgerufen war. Das Magnetfeld ändert sich jedoch auch, wenn ein Stromleiter verschoben oder deformiert wird, und es können darum auch auf diese Weise Induktionsströme entstehen.

Wir denken uns zunächst zwei Stromkreise, die die Indizes 1 und 2 tragen und von denen der zweite keine elektromotorische Kraft enthält. Wir wollen den Induktionsstrom im zweiten Kreis bestimmen, wenn der erste aus einer Lage A in eine Lage B gebracht wird — wobei auch Deformationen zugelassen sind — jedoch soll im ersten Kreis die Stromstärke i konstant sein. Experimentell sichergestellt ist die Aussage, daß die gesamte durch 2 transportierte Elektrizitätsmenge Null ist, wenn nach einer beliebigen Änderung der Lage von 1 und der Stromstärke in 1 der Anfangszustand wieder hergestellt ist. Wir denken uns nun folgenden Versuch ausgeführt: im Kreis 1 in der Lage A wird der Strom geschlossen, dann der Kreis in die Lage B gebracht, der Strom wieder geöffnet und der Kreis nach A zurückverschoben. Das Zeitintegral des gesamten Induktionsstromes muß Null sein. Bei der letzten Verschiebung, während welcher kein Strom fließt, ist kein Induktionsstrom in 2 erzeugt worden. Nennen wir M_a den Koeffizienten der Gegeninduktion bei der Lage A, M_b denjenigen bei der Lage B, r_2 den Widerstand des zweiten Kreises und j das Zeitintegral des durch die Verschiebung hervorgerufenen Induktionsstromes, so gilt:

$$-M_a\frac{i_1}{r_2}+j+M_b\frac{i_1}{r_2}=0,$$

also

$$j = \frac{(M_a - M_b)\, i_1}{r_2}.$$

Die Selbstinduktion in 2 braucht bei dieser Überlegung nicht berücksichtigt zu werden, da vor den betrachteten Veränderungen und auch danach (falls man nur lange genug wartet), die Kreise stromlos sind; in dem Integral $\int i_2\, dt$, erstreckt über die ganze Dauer der Veränderungen, fällt darum der auf die Selbstinduktion in 2 bezügliche Term $-\frac{1}{r_2} L_2 \frac{d i_2}{dt}$ (vgl. z. B. Gleichung (7) auf S. 150) fort.

Daß die durch die Verschiebung von 1 hervorgerufenen Induktionsströme in der soeben angegebenen Weise berechnet werden können, folgt übrigens unmittelbar aus den Grundannahmen, die in der zweiten MAXWELLschen Gleichung ausgedrückt sind. Das Linienintegral der elektrischen Kraft längs des Leiters 2 wird stets durch die Änderung der Anzahl Induktionslinien bestimmt, die er umschließt, unabhängig davon, ob die Änderung durch eine veränderliche Stromstärke in 1 oder durch eine Verschiebung des einen Kreises relativ zum anderen erfolgt.

Wir können die Gleichungen (7) auf S. 150 ohne weiteres auch so umformen, daß sie für beliebige Verschiebungen und Deformationen von Leitern mit und ohne gleichzeitig stattfindende Stromänderungen gültig sind. In der ersten Gleichung bedeutete der Term $-M \frac{d i_2}{dt}$ die mit negativem Vorzeichen eingesetzte Änderung der Anzahl Induktionslinien in der Zeiteinheit, die von 2 herstammen und von 1 umschlossen werden. Da in jedem Fall diese Anzahl gleich $M i_2$ ist, so haben wir den betreffenden Term in Gleichung (7) durch $-\frac{d}{dt}(M i_2)$ zu ersetzen. Ebenso tragen wir einer eventuellen Deformation des Stromleiters, durch die der Selbstinduktionskoeffizient beeinflußt werden könnte, Rechnung, wenn wir $-\frac{d}{dt}(L_1 i_1)$ statt $-L_1 \frac{d i_1}{dt}$ schreiben.

Die Gleichungen erhalten jetzt die Form

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{r_1}\left\{F_1 - \frac{d}{dt}(L_1 i_1) - \frac{d}{dt}(M i_2)\right\}, \\ i_2 &= \frac{1}{r_2}\left\{F_2 - \frac{d}{dt}(L_2 i_2) - \frac{d}{dt}(M i_1)\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

Wir wollen jetzt auch die Änderung der Energie untersuchen. Dabei werden wir der Einfachheit halber annehmen, die Bewegung geschähe so langsam oder sei so geregelt, daß keine merkliche kinetische Energie entsteht, ferner sollen auch Kräfte wie die Schwerkraft nicht ins Spiel kommen; wir wollen allein die Arbeit der die Bewegung verursachenden Kräfte und der elektromotorischen Kräfte, die Wärmeentwicklung in den Stromkreisen und die elektromagnetische Energie des Feldes berücksichtigen. Diese letztere ist in jedem Zeitpunkt durch Gleichung (8) gegeben; nennen wir dW die Arbeit der Kräfte, die die Stromkreise während der Zeit dt in Bewegung halten, so finden wir

$$dW + F_1 i_1 dt + F_2 i_2 dt = i_1^2 r_1 dt + i_2^2 r_2 dt + \frac{dA}{dt} dt.$$

Wenn wir in dem letzten Term den Ausdruck (8) substituieren und die übrigen Terme mit Hilfe von (32) umrechnen, so erhalten wir:

$$dW + i_1 \frac{d}{dt}(L_1 i_1) dt + i_2 \frac{d}{dt}(L_2 i_2) dt + i_1 \frac{d}{dt}(M i_2) dt + i_2 \frac{d}{dt}(M i_1) dt =$$

$$= \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2} L_1 i_1^2) dt + \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2} L_2 i_2^2) dt + \frac{d}{dt}(M i_1 i_2) dt,$$

oder

$$dW = -\tfrac{1}{2} i_1^2 dL_1 - \tfrac{1}{2} i_2^2 dL_2 - i_1 i_2 dM.$$

Um dieses Resultat anschaulich machen zu können, wollen wir die Selbstinduktionskoeffizienten L_1 und L_2 als konstant ansehen, dann geht die Gleichung über in

$$dW = -i_1 i_2 dM. \tag{33}$$

Ergibt die Gleichung einen positiven Wert für dW, so kostet uns die betrachtete Verschiebung Arbeit, die Stromkreise üben also aufeinander Kräfte aus, die sich der Verschiebung widersetzen. Ist dW negativ, so üben die Kreise Kräfte aufeinander aus, die die Verschiebung von selbst hervorrufen. Diese Kräfte heißen elektrodynamische Kräfte. Entsprechen die Stromrichtungen einander, so kostet uns die Verschiebung, bei der M kleiner wird, Arbeit, die Kreise üben also Kräfte aus, die der Verschiebung Widerstand entgegensetzen. Diese Kräfte drehen ihr Vorzeichen um, wenn einer der Ströme seine Richtung wechselt.

Fünftes Kapitel.

Die Energie im elektromagnetischen Feld.

§ 1. Die allgemeine Gleichung.

Wenn uns eine Reihe von Gleichungen irgendeine physikalische Erscheinung beschreiben, so können wir stets aus ihnen eine Gleichung ableiten, die die Konstanz der Energie ausdrückt. Die Form dieser Gleichung ist stets so beschaffen, daß die Summe einer Anzahl Terme konstant, die Summe ihrer Veränderungen also Null ist; wir werden also, um die Gleichung zu finden, von einem Ausdruck ausgehen, der die Änderung einer Energie oder der Arbeit bestimmter Kräfte wiedergibt. Bei unserem Problem führt uns dieser Gedankengang dazu, (wenn wir uns z. B. durch eine Analogie mit einer strömenden Flüssigkeit leiten lassen), das Integral

$$\int (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{C})\, dS,$$

das über einen Raum innerhalb einer geschlossenen Fläche σ erstreckt ist, zu transformieren. Wir gehen dabei von den Grundgleichungen in der auf S. 75 angegebenen Form aus. Die Einheiten sind die auf S. 74 unter D angeführten. Den betrachteten Raum können wir durch Unstetigkeitsflächen so einteilen, daß in jedem einzelnen Teil alle auftretenden Größen stetig sind. Mit Hilfe der Hauptgleichung I′ formen wir unser Integral folgendermaßen um:

$$\int (\mathfrak{E}_x \mathfrak{C}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{C}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{C}_z)\, dS = c \int \left\{ \mathfrak{E}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{E}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \right) + \mathfrak{E}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right) \right\} dS.$$

Durch partielle Integration bringen wir diesen Ausdruck in die Form

$$-c\int\left\{\mathrm{H}_x\left(\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial y}\right)+\mathrm{H}_y\left(\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial z}\right)+\mathrm{H}_z\left(\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x}\right)\right\}dS+$$
$$+c\int\{\mathrm{E}_x(\mathrm{H}_z\cos(n,y)-\mathrm{H}_y\cos(n,z))+\mathrm{E}_y(\mathrm{H}_x\cos(n,z)-$$
$$-\mathrm{H}_z\cos(n,x))+\mathrm{E}_z(\mathrm{H}_y\cos(n,x)-\mathrm{H}_x\cos(n,y))\}\,d\sigma+$$
$$+\Sigma c\int\{\mathrm{E}_{xI}(\mathrm{H}_{zI}\cos(n,y)-\mathrm{H}_{yI}\cos(n,z))-\mathrm{E}_{xII}(\mathrm{H}_{zII}\cos(n,y)-$$
$$-\mathrm{H}_{yII}\cos(n,z))+\cdots\}\,d\sigma.$$

Das erste Oberflächenintegral ist über die äußere Oberfläche σ zu erstrecken, die weiteren, denen in der Klammer noch zwei durch zyklische Buchstabenvertauschung entstehende Termpaare zuzufügen sind, über die verschiedenen Unstetigkeitsflächen. Jedes einzelne von ihnen läßt sich in der Form schreiben:

$$\int\left\{-\begin{vmatrix}\mathrm{E}_{xI} & \mathrm{E}_{yI} & \mathrm{E}_{zI}\\ \mathrm{H}_{xI} & \mathrm{H}_{yI} & \mathrm{H}_{zI}\\ \cos(n\,x) & \cos(n\,y) & \cos(n\,z)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathrm{E}_{xII} & \mathrm{E}_{yII} & \mathrm{E}_{zII}\\ \mathrm{H}_{xII} & \mathrm{H}_{yII} & \mathrm{H}_{zII}\\ \cos(n\,x) & \cos(n\,y) & \cos(n\,z)\end{vmatrix}\right\}d\sigma.$$

Ziehen wir in der ersten Determinante von der ersten Zeile die mit E_{nI} erweiterte dritte ab und von der zweiten Zeile die mit H_{nI} erweiterte dritte, so bleiben die Projektionen der Tangentialkomponenten von E und H auf die Achsen übrig; führt man die gleiche Operation in der zweiten Determinante durch, so folgt wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponenten, daß beide Determinanten einander gleich sind. Dies läßt sich auch einsehen, wenn man bedenkt, daß die erste Determinante den Inhalt eines Parallelopipedons darstellt, dessen Seiten die drei Vektoren E_I, H_I und der Einheitsvektor in Richtung der Normalen sind. Dieser Inhalt bleibt ungeändert, wenn wir E_I und H_I durch ihre Tangentialkomponenten ersetzen. In gleicher Weise läßt sich die zweite Determinante interpretieren, und daraus folgt wieder die Gleichheit.

Wir formen unsere Gleichung weiter mit Hilfe der Hauptgleichung II um und wollen zugleich bei dem Flächenintegral den Integranden wieder in Determinantenform schreiben. Wir erhalten:

$$\int(\mathrm{E}_x\mathrm{C}_x+\mathrm{E}_y\mathrm{C}_y+\mathrm{E}_z\mathrm{C}_z)\,dS+\int(\mathrm{H}_x\dot{\mathrm{B}}_x+\mathrm{H}_y\dot{\mathrm{B}}_y+\mathrm{H}_z\dot{\mathrm{B}}_z)\,dS=$$
$$=-c\int\begin{vmatrix}\mathrm{E}_x & \mathrm{E}_y & \mathrm{E}_z\\ \mathrm{H}_x & \mathrm{H}_y & \mathrm{H}_z\\ \cos(n\,x) & \cos(n\,y) & \cos(n\,z)\end{vmatrix}d\sigma.$$

Wir wollen jetzt annehmen, unsere Medien seien alle isotrop. Bei der weiteren Umformung des ersten Integrals haben wir aber einen

Unterschied zwischen dem Raum zu machen, der von den Leitern eingenommen wird, und demjenigen, in dem sich Dielektrika befinden. Wir spalten also das Integral in zwei Teile, die wir mit den Indizes 1 und 2 bezeichnen. Im letzteren ist nach Hauptgleichung IV) $\mathfrak{C} = \dot{\mathfrak{D}}$, im ersteren nach Hauptgleichung V) $\mathfrak{C} = 1/\varrho\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e)$, also $\mathfrak{E} = \varrho\,\mathfrak{C} - \mathfrak{E}_e$.

Wenn wir dies einführen und die Vorzeichen umkehren, erhalten wir:

$$\int (\mathfrak{E}_{e\,x}\,\mathfrak{C}_x + \mathfrak{E}_{e\,y}\,\mathfrak{C}_y + \mathfrak{E}_{e\,z}\,\mathfrak{C}_z)\,dS_1 - \int \varrho\,(\mathfrak{C}_x^2 + \mathfrak{C}_y^2 + \mathfrak{C}_z^2)\,dS_1 -$$
$$- \int (\mathfrak{E}_x\,\dot{\mathfrak{D}}_x + \mathfrak{E}_y\,\dot{\mathfrak{D}}_y + \mathfrak{E}_z\,\dot{\mathfrak{D}}_z)\,dS_2 - \int (\mathfrak{H}_x\,\dot{\mathfrak{B}}_x + \mathfrak{H}_y\,\dot{\mathfrak{B}}_y + \mathfrak{H}_z\,\dot{\mathfrak{B}}_z)\,dS$$
$$= c \int \begin{vmatrix} \mathfrak{E}_x & \mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{H}_x & \mathfrak{H}_y & \mathfrak{H}_z \\ \cos(n\,x) & \cos(n\,y) & \cos(n\,z) \end{vmatrix} d\sigma.$$

Werten wir jetzt die letzte Determinante aus zu $\cos(n\,x)\,(\mathfrak{E}_y\,\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\,\mathfrak{H}_y) + \cos(n\,y)\,(\mathfrak{E}_z\,\mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x\,\mathfrak{H}_z) + \cos(n\,z)\,(\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\,\mathfrak{H}_x)$, so sehen wir, daß sie als Komponente in Richtung der nach außen gezogenen Normale eines Vektors $1/c\,\mathfrak{S}$ aufgefaßt werden kann, dessen Komponenten in der Richtung der Achsen lauten: $\mathfrak{E}_y\,\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\,\mathfrak{H}_y$ usf., der also gleich dem Vektorprodukt $[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}]$ ist.

Ferner läßt sich die Gleichung vereinfachen, wenn man nach Hauptgleichung V und III in die beiden letzten Terme auf der linken Seite der obigen Gleichung einführt $\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}$. Man erhält schließlich

$$\int (\mathfrak{E}_e \cdot \mathfrak{C})\,dS_1 - \int \varrho\,\mathfrak{C}^2\,dS_1 - \frac{d}{dt}\int \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\mathfrak{E}^2\,dS_2 -$$
$$- \frac{d}{dt}\int \tfrac{1}{2}\,\mu\,\mathfrak{H}^2\,dS = \int \mathfrak{S}_n\,d\sigma. \qquad (1)$$

In dieser Gleichung bedeutet nun offenbar der erste Term die Arbeit, die von den elektromotorischen Kräften in den Leitern pro Zeiteinheit geleistet wird.

§ 2. Beispiele.

Um die Bedeutung der übrigen Terme zu erkennen, ist es das einfachste, einige Spezialfälle zu untersuchen.

Wir nehmen zunächst die Oberfläche σ so weit entfernt an, daß wir in Übereinstimmung mit unseren früheren Überlegungen das letzte

Integral von Gleichung (1) vernachlässigen können. Haben wir es ferner mit stationären Zuständen zu tun, also mit solchen Erscheinungen, wie wir sie in Kap. III behandelt haben, so bleibt von der Gleichung allein über:

$$\int (\mathrm{E}_e \cdot \mathrm{C})\, d\,S_1 = \int \varrho\, \mathrm{C}^2\, d\,S_1. \qquad (2)$$

Die rechte Seite der Gleichung gibt offenbar die Wärme an, die nach dem JOULEschen Gesetz in den Leitern entwickelt wird, und die Gleichung sagt aus, daß diese Wärme der Arbeit der elektromotorischen Kräfte äquivalent ist.

Diese Äquivalenz besteht jedoch nicht, wenn — wie wir im vorigen Kapitel sahen — infolge einer Änderung der Stromstärke in den Leitern die Feldenergie ab- oder zunimmt. Nehmen wir an, daß dabei keine Ladungen entstehen oder vorhandene Ladungen sich nicht ändern, so ist im umgebenden Dielektrikum E konstant, und unsere Gleichung wird

$$\int (\mathrm{E}_e \cdot \mathrm{C})\, d\,S_1 = \int \varrho\, \mathrm{C}^2\, d\,S_1 + \frac{d}{d\,t} \int \tfrac{1}{2}\, \mu\, \mathrm{H}^2\, d\,S. \qquad (3)$$

Der letzte Term, die Differenz zwischen der Arbeit der elektromotorischen Kräfte und der entwickelten Wärme, gibt die Energieänderung an, die als Folge des durch den Strom erzeugten Magnetfeldes auftritt. Diese Energie beträgt

$$\int \tfrac{1}{2}\, \mu\, \mathrm{H}^2\, d\,S.$$

Ebenso wie bei der analogen Gleichung in § 5, Kap. II wollen wir diese Energie in bestimmter Weise über den Raum verteilt denken, und zwar wollen wir jedem Element $d\,S$ die Energiemenge $\frac{1}{2}\, \mu\, \mathrm{H}^2\, d\,S$ zuschreiben. Dann erhalten wir als Energie pro Volumeneinheit in Übereinstimmung mit den Ausführungen auf S. 173

$$\tfrac{1}{2}\, \mu\, \mathrm{H}^2 \text{ (in elektromagnetischen Einheiten } \frac{\mu}{8\pi}\mathrm{H}^2,$$

$$\text{in elektrostatischen Einheiten } \frac{\mu}{8\pi c^2}\mathrm{H}^2),$$

wofür wir auch schreiben können

$$\frac{1}{2\mu}\mathrm{B}^2 \text{ (in elektromagnetischen Einheiten } \frac{1}{8\pi\mu}\mathrm{B}^3,$$

$$\text{in elektrostatischen Einheiten } \frac{1}{8\pi\mu c^2}\mathrm{B}^2),$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}) \quad (\text{in elektromagnetischen Einheiten } \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}),$$

$$\text{in elektrostatischen Einheiten } \frac{1}{8\pi c^2}(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B})).$$

Lassen wir schließlich auch noch eine veränderliche elektrische Kraft in den Dielektriken zu, so können wir Gleichung (1) schreiben:

$$\int(\mathfrak{E}_e\cdot\mathfrak{C})\,dS_1 = \int\varrho\,\mathfrak{C}^2\,dS_1 + \frac{d}{dt}\int\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\mathfrak{E}^2\,dS_2 + \frac{d}{dt}\int\tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{H}^2\,dS. \qquad (4)$$

Gleichung (4) drückt aus, daß die Arbeit der elektromotorischen Kräfte gleich ist der entwickelten Wärme vermehrt um die Zunahme der Feldenergie. Diese letztere läßt sich als aus zwei Teilen bestehend auffassen. Der erste

$$\int\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\mathfrak{E}^2\,dS_2$$

hängt allein von der elektrischen Kraft ab und entspricht vollkommen derjenigen Energie, die wir in Kap. II bei elektrostatischen Problemen kennen lernten, der zweite

$$\int\tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{H}^2\,dS$$

ist von der magnetischen Kraft abhängig und spielt bei den in Kap. IV betrachteten Induktionswirkungen die Hauptrolle. Zweckmäßig nennt man diese beiden Teile elektrische und magnetische Energie.

§ 3. Der Poyntingsche Energiestrom.

Wir wollen die Gleichung (1) noch einmal für den allgemeinsten Fall aufstellen und damit beginnen, die Oberfläche σ ganz beliebig zu legen, und das System zu betrachten, das von der Fläche umschlossen wird. Die Bedeutung der einzelnen Terme auf der linken Seite der Gleichung (1) ergibt sich nach dem Vorhergehenden jetzt von selbst, das Oberflächenintegral auf der rechten Seite bedarf jedoch noch einer näheren Interpretation. Es muß natürlich die Energie bedeuten, die unser System von der Umgebung aufnimmt, bzw. an sie abgibt; solch eine Übertragung wird im allgemeinen stattfinden, da die willkürlich gelegte Fläche σ den Zusammenhang zwischen den Körpern zu ihren beiden Seiten nicht aufhebt. Da diese abgegebene oder aufgenommene Energie durch ein Integral dargestellt wird, das über die ganze Oberfläche σ erstreckt wird, scheint es vernünftig, jedem

Oberflächenelement das entsprechende Element des Integrals $S_n\, d\sigma$ zuzuordnen. Auf diese Weise wurde POYNTING dazu geführt, von einem Energiestrom zu sprechen, was bedeuten soll, eine Energiemenge $S_n\, d\sigma$ fließt in der Zeiteinheit durch das Flächenelement $d\sigma$. Hierbei ist der Vektor **S** gegeben durch

$$\mathbf{S} = c\,[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] \tag{5}$$

und ist vollständig unabhängig von der Oberfläche σ. Dieser Vektor läßt sich jetzt in jedem Punkt des Raumes angeben. Führt man diesen Energiestrom von POYNTING ein, so läßt sich jeder Term in der Energiegleichung auf einfache Weise interpretieren.

§ 4. Ein einfaches Beispiel.

Wir wollen als erstes das Beispiel das eines einzigen, geschlossenen Leitungsdrahtes wählen, in dem eine elektromotorische Kraft wirksam ist und ein konstanter Strom fließt. Fig. 24 gebe den Draht an, die elektromotorische Kraft wirke im Teil zwischen A und B, A sei der positive Pol, und der Strom fließe in Richtung der Pfeile. Wir werden nun zeigen, daß nach dem POYNTINGschen Theorem dauernd aus dem Element $A\,B$ Energie in den Äther strömt, während die übrigen Teile des Drahtes Energie aus dem Äther aufnehmen.

Wie wir wissen, besteht im Leiter außerhalb des Elementes überall ein Potentialabfall und damit eine elektrische Kraft in Richtung des Stromes. Diese ist sowohl dicht an der Drahtoberfläche als auch im Drahtinnern vorhanden, und da an der Oberfläche die Tangentialkomponente, in diesem Fall also die gesamte elektrische Kraft, stetig ist, so muß auch ein Vektor **E** außen, unmittelbar an der Drahtoberfläche existieren. Ebenso ist dort auch eine magnetische Kraft **H** vorhanden. Wir wollen nun ein Drahtstück betrachten, das die Form eines langgestreckten, kreisförmigen Zylinders hat und wollen unser Augenmerk auf einen etwa in der Mitte liegenden Teil richten (Fig. 25). Der Vektor **E** hat die Richtung der den Zylinder erzeugenden Geraden, der Vektor **H** liegt in der Tangente eines Kreises, dessen Mittelpunkt sich in der Drahtachse befindet und dessen Fläche senkrecht zur Achse steht; die Richtung von **H** längs der Tangente ist durch die

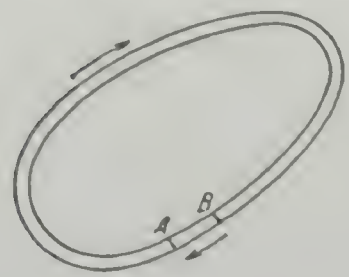

Fig. 24.

Stromrichtung bestimmt. Der Vektor S steht senkrecht auf beiden Vektoren, seine Richtung entspricht einer Drehung von E nach H über einen rechten Winkel, verläuft also nach innen. Diese Richtungen werden näherungsweise überall im Draht gelten, außer an der Spannungsquelle, wenn nur der Krümmungsradius des Drahtteiles groß im Vergleich zur Drahtdicke ist. Es strömt also, außer an der Spannungsquelle, in allen Teilen Energie aus der Umgebung in den Draht. In dem Abschnitt zwischen B und A hat der Strom die Richtung $B\,A$, also H dieselbe Richtung wie in den angrenzenden Teilen, aber der Potentialabfall verläuft in der Richtung $A\,B$, und somit hat auch die elektrische Kraft diese Richtung, d. h. die umgekehrte, wie in den angrenzenden Stücken. Der Vektor S kehrt darum seine Richtung um, er weist vom Draht fort. In diesem Abschnitt, in dem die elektromotorische Kraft ihren Sitz hat, strömt also dauernd Energie aus dem Stromkreis in das Medium. Vom Medium aus strömt sie dann wieder in den Draht zurück.

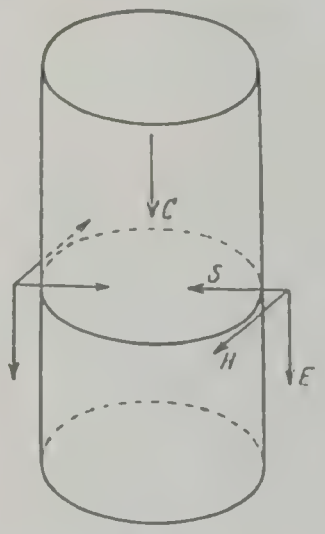

Fig. 25.

Wir wollen Gleichung (1) auf das hier angeführte Beispiel anwenden und als Raum innerhalb der Oberfläche σ ein Drahtstück nehmen, in dem keine elektromotorische Kraft vorhanden ist. Der erste Term auf der linken Seite der Gleichung fällt dann fort. Auch die beiden letzten Terme verschwinden, da wir einen stationären Zustand voraussetzen. Die Gleichung drückt jetzt aus, daß die Wärmeentwicklung in dem betrachteten Teil des Stromkreises, also eine Größe, die wirklich gemessen werden kann, gleich der aus dem Medium aufgenommenen Energie ist.

Das jetzt folgende Beispiel hat man als Einwand gegen die Poyntingsche Theorie angeführt. Wir betrachten das einfachste elektrostatische Problem, eine positiv geladene Kugel, die überall von Äther umgeben ist und sich im magnetischen Feld der Erde befindet. $O\,H$ (s. Fig. 26) sei die Richtung des Erdmagnetismus. In einem beliebigen Punkt P außerhalb der Kugel haben E und H die in der Figur angegebenen Richtungen, also existiert auch ein Vektor S. Auf der Geraden $O\,H$ ist sein Wert gleich Null, in allen anderen Punkten jedoch besitzt er endliche Werte, und somit ist im Medium ein Energiestrom

vorhanden. Dies scheint eigenartig, da der gesamte Zustand des Systems unverändert bleibt. Sehen wir uns jedoch den Vektor S näher an, so bemerken wir, daß das Auftreten eines Energiestromes keinen Widerspruch bedeutet. Die Richtung von S in jedem Punkt ist nämlich die der Tangente an einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf OH steht und dessen Mittelpunkt auf OH liegt. In allen Punkten eines solchen Kreises sind natürlich E und H konstant und schließen den gleichen Winkel ein; darum ist auch S in all diesen Punkten konstant. Nach dem POYNTINGschen Theorem fließt nun die Energie in Kreisen um die Achse, so daß durch jeden Querschnitt einer überall gleich weiten, kreisförmigen Röhre gleich viel Energie strömt, und offenbar wird dadurch am Zustand des ganzen Systems nichts geändert. Einen solchen Energiestrom kann man nicht bemerken, und darum läßt sich nicht behaupten, die Betrachtungsweise von POYNTING stände mit diesen Beobachtungen in Widerstreit.

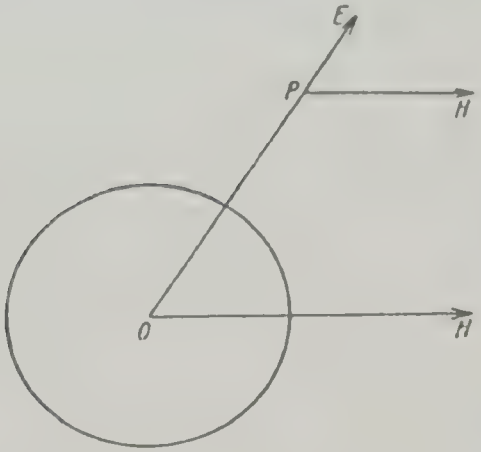

Fig. 26.

Sechstes Kapitel.

Die elektromagnetische Lichttheorie.

§ 1. Der freie Äther.

Wir kommen noch einmal auf unsere allgemeinen Gleichungen zurück und zwar an erster Stelle auf die, die für den freien Äther gelten.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathfrak{C}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{C} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$$
$$\mathfrak{C} = \dot{\mathfrak{E}}.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich leicht alle Vektoren außer $\mathfrak{H}$ oder alle Vektoren außer $\mathfrak{E}$ eliminieren, und wir erhalten dann

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{E}}$$

und ebenso

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{H} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{H}}.$$

Wir werden jetzt mit der ersten dieser Gleichungen operieren, für die zweite gelten dann ohne weiteres dieselben Überlegungen. Drücken wir für beide Größen die einzelnen Komponenten aus, so finden wir für die in der X-Richtung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2},$$

was sich in die Form bringen läßt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2}.$$

Nun ist nach unserer Hauptgleichung $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$, also läßt sich die letzte Gleichung schreiben:

$$\Delta \mathfrak{E}_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Analoges gilt für die übrigen Komponenten.

Die so gefundenen Differentialgleichungen sagen aus, daß sich ein Zustand mit der Geschwindigkeit c fortpflanzt. Wir wollen dies nicht allgemein beweisen, sondern uns auf den einfachsten und zugleich wichtigsten Fall beschränken, nämlich den, daß in einem gegebenen Zeitpunkt der Zustand aller Punkte einer bestimmten Ebene derselbe ist, und daß das gleiche für jede ihr parallele Ebene gilt. Der Charakter einer überall konstanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit bringt es mit sich, daß dann dasselbe zu jeder beliebigen Zeit gilt. Wir nennen einen solchen Vorgang Fortpflanzung mit ebenen Wellenfronten, wobei die parallelen Flächen die Wellenfronten darstellen. Bezeichnen wir die Größe, die den Zustand bestimmt, mit Φ, und nehmen wir die Z-Achse senkrecht zu den Wellenfronten an, so ist $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ überall Null, und die Gleichung

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

deren allgemeine Lösung lautet

$$\Phi = f_1 (z - c\,t) + f_2 (z + c\,t); \tag{3}$$

hierbei sind f_1 und f_2 beliebige Funktionen.

Betrachten wir zunächst den ersten Term. Die Gleichung drückt, wie man ohne weiteres einsieht, aus, daß zu einem bestimmten Zeitpunkt in irgendeinem beliebigen Punkt der gleiche Zustand besteht, der t Sekunden früher in einem anderen Punkte herrschte; und diesen finden wir, wenn wir um die Strecke $c\,t$ längs der Z-Achse zurückgehen. Also pflanzt sich der Zustand in der Tat mit der Geschwindigkeit c längs der Z-Achse fort. In gleicher Weise sagt der zweite Term in Gleichung (3) aus, daß sich der Zustand mit der Geschwindigkeit c

in Richtung der negativen Z-Achse fortpflanzt. Im gleichen Raum kann die Ausbreitung des Zustandes auch in beiden Richtungen gleichzeitig vor sich gehen, und dies drückt Gleichung (3) in ihrer vollständigen Form aus. Der Einfachheit halber wollen wir uns aber auf den ersten Term beschränken.

Das Resultat, das wir jetzt erhalten haben, lautet also: mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen läßt sich eine Gleichgewichtsstörung in freien Äther beschreiben, die sich mit ebenen Wellenfronten und mit der Geschwindigkeit c fortpflanzt. Solche elektromagnetischen Wellen wurden zum ersten Male bei den berühmten Versuchen von Hertz wahrgenommen, und dadurch war bewiesen, daß ein durch oszillierende Ströme in Leitern entstehender periodischer Zustand sich mit endlicher Geschwindigkeit durch das Dielektrikum fortpflanzt. Da der Zustand bei den Hertzschen Versuchen ein einfacher, periodischer war, so hat in diesem Spezialfall die Lösung der Gleichung (2) die Form

$$A \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \alpha\right\}; \tag{4}$$

λ bedeutet hierbei die Länge der elektromagnetischen Wellen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c hat man später aus der Wellenlänge und der Schwingungszeit bestimmen können und erhielt ein Resultat, das in Übereinstimmung mit dem aus der Maxwellschen Theorie folgenden war. Wie wir nämlich bereits in Kap. I gesehen haben, gibt der Koeffizient c das Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Einheit der Elektrizität an, und diese Zahl hat in der Tat die Dimension einer Geschwindigkeit. Der Zahlenwert ist $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, und stimmt überein mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Dieser Umstand veranlaßte Maxwell, das Licht selbst als elektromagnetische Gleichgewichtsstörung aufzufassen. Der Unterschied der Lichtwellen gegenüber den Hertzschen Wellen ist nur ein quantitativer, die Wellenlänge ist beim Licht sehr viel kleiner.

In dieser elektromagnetischen Lichttheorie ist nach dem Vorangehenden die Größe Φ, der sogenannte Lichtvektor, der die Gleichgewichtsstörung bestimmt, die elektrische oder die magnetische Kraft. Wir wollen jetzt unter Beschränkung auf ebene Wellen diesen Vektor näher untersuchen.

Da unter unseren Voraussetzungen alle Differentialquotienten nach x und nach y verschwinden, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\dot{E}_z$$

$$\dot{E}_z = 0$$

und aus

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Ebenso finden wir

$$\dot{H}_z = 0 \text{ und } \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Die Größen E_z und H_z sind also in jedem Punkt des Raumes und zu allen Zeiten konstant. Wenn uns allein die Fortpflanzung einer Gleichgewichtsstörung interessiert, so können wir den Wert von E_z und H_z auch gleich Null setzen. Wir finden also, unabhängig davon, ob wir die magnetische oder die elektrische Kraft als Lichtvektor auffassen, daß diese stets senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung stehen, und drücken dies aus, wenn wir sagen, wir haben es beim Licht stets mit Transversalwellen zu tun.

Unsere Gleichungen vereinfachen sich jetzt noch weiter, wenn wir $E_z = 0$ und $H_z = 0$ einsetzen; wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} c\frac{\partial H_x}{\partial z} &= \dot{E}_y, & c\frac{\partial E_y}{\partial z} &= \dot{H}_x \\ -c\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \dot{E}_x, & -c\frac{\partial E_x}{\partial z} &= \dot{H}_y \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Da die oberen zwei Gleichungen und die zwei unteren vollständig unabhängig voneinander sind, können wir den Zustand auch als durch Superposition zweier anderer Zustände entstanden auffassen. Für den ersten ist $E_x = 0$ und $H_y = 0$, während die Beziehung zwischen E_y und H_x durch die oberen zwei Gleichungen gegeben ist; hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ \text{und} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Für den zweiten Zustand ist $E_y = 0$ und $H_x = 0$, und die Beziehung zwischen E_x und H_y wird durch die zwei unteren Gleichungen von (5) wiedergegeben; hieraus folgen zwei weitere Beziehungen, die denen von (6) analog aufgebaut sind. Diese beiden Zustände, bei denen der Lichtvektor stets und überall parallel zu einer bestimmten Fläche schwingt, nennen wir polarisiertes Licht. In dem obenstehenden liegt begründet, daß ein Bündel natürlichen Lichtes stets als Superposition zweier Bündel aufgefaßt werden kann, die in zueinander senkrechten Ebenen polarisiert sind.

Die Lichtstrahlen fallen mit der Normalen auf den Wellenfronten zusammen und haben nach dem im vorigen Kapitel Gesagten jetzt eine elektromagnetische Bedeutung. Denn, wie wir sahen, steht der Poyntingsche Vektor, der den Energiestrom wiedergibt, stets senkrecht sowohl auf der elektrischen als auch auf der magnetischen Kraft. Der Lichtstrahl gibt also in jedem Punkt die Richtung dieses Vektors an, und wir können somit die Lichtstrahlen als Stromlinien der elektromagnetischen Energie auffassen.

§ 2. Isotrope Dielektrika.

Wollen wir nun die Ausbreitung einer elektromagnetischen Gleichgewichtsstörung, im besonderen des Lichtes, in einem isotropen, homogenen Dielektrikum untersuchen, so haben wir von unseren Hauptgleichungen nur die letzte zu modifizieren und an Stelle von $C = \dot{E}$ zu setzen $C = \varepsilon \dot{E}$, wobei ε die Dielektrizitätskonstante des betrachteten Mediums bedeutet. Gleichung (1) geht dadurch über in

$$\Delta E_x = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Ebenso tritt an Stelle von (5) und (6)

$$\left.\begin{aligned} c \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \varepsilon \dot{E}_y, & c \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \dot{H}_x \\ -c \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon \dot{E}_x, & -c \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \dot{H}_y \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{9}$$

und entsprechende Gleichungen für H_y und E_x.

Die Fortpflanzung findet jetzt mit der Geschwindigkeit $c/\sqrt{\varepsilon}$ statt, entspricht aber sonst ganz der früheren im freien Äther. Durch Rechnen mit der magnetischen Kraft hätten wir genau dasselbe Resultat erhalten. Das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Äther zu der in irgendeinem Medium ist durch optische Methoden leicht zu bestimmen; es ist nämlich nichts anderes als der Brechungsindex des betreffenden Stoffes, und nach unserer Theorie muß für jedes Dielektrikum der Brechungsindex gleich der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstanten sein. Diese Voraussage wird allerdings durch die Beobachtungen im allgemeinen nicht bestätigt, denn der Brechungsindex ist von der Wellenlänge abhängig. Nur bei den Stoffen, für die diese Abhängigkeit sehr gering ist, im besonderen bei Gasen, finden wir eine befriedigende Übereinstimmung zwischen dem Wert der Dielektrizitätskonstanten und dem Quadrat des Brechungsindex. Im übrigen werden diese beiden Größen in der Elektronentheorie verschieden erklärt.

§ 8. Reflexion und Brechung.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, werden wir uns von jetzt ab auf monochromatisches Licht beschränken und weiter die Erscheinungen untersuchen, die beim Übergang des Lichtes von einem Medium in ein anderes auftreten, wobei natürlich die auf S. 75 angeführten Grenzbedingungen erfüllt sein müssen.

Denken wir uns zwei Medien, die wir durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden, und die längs einer ebenen Fläche, unserer $X\,Y$-Fläche, aneinander grenzen. Im ersten Medium möge Licht unter einem Winkel Φ, gegen die Normale gemessen, auf die Grenzfläche fallen; unsere Y-Achse legen wir senkrecht auf die Ebene, die durch die Lichtstrahlrichtung und die Flächennormale geht (die Einfallsebene), und zählen den Winkel Φ von $O\,Z$ nach $O\,X$, wobei O der Punkt ist, in dem der Lichtstrahl die Grenzebene trifft. Um die Gleichungen zu finden, die das einfallende Licht wiedergeben, wählen wir zunächst eine neue Z'-Achse längs des einfallenden Lichtstrahles in der Fortpflanzungsrichtung und eine X'-Achse senkrecht zur $Y\,O\,Z'$-Ebene. Das Licht soll, wie gesagt, monochromatisch sein, außerdem möge es auch polarisiert sein, aber die Polarisationsebene kann beliebig orientiert zur Einfallsebene liegen.

Unsere Gleichungen lauten dann:

$$\mathrm{E}_{e_y} = A_e \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(z' - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right)$$

$$\mathrm{E}_{e_{x'}} = B_e \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(z' - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right).$$

Der Index e ist hier eingeführt, um das einfallende Licht zu charakterisieren.

Mittels der Gleichungen (8) leiten wir hieraus ab

$$\mathrm{H}_{e_{x'}} = -A_e \sqrt{\varepsilon_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(z' - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right)$$

$$\sqrt{\mathrm{H}_{e_y}} = B_e \sqrt{\varepsilon_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(z' - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right).$$

Aus den Gleichungen folgt

$$\mathrm{E}_{e_x} = B_e \cos \Phi \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(x \sin \Phi + z \cos \Phi - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right),$$

$$\mathrm{E}_{e_y} = A_e \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(x \sin \Phi + z \cos \Phi - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right),$$

$$\mathrm{E}_{e_z} = -B_e \sin \Phi \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(x \sin \Phi + z \cos \Phi - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right)$$

und

$$\mathrm{H}_{e_x} = -A_e \sqrt{\varepsilon_1} \cos \Phi \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(x \sin \Phi + z \cos \Phi - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right),$$

$$\mathrm{H}_{e_y} = B_e \sqrt{\varepsilon_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(x \sin \Phi + z \cos \Phi - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right),$$

$$\mathrm{H}_{e_z} = A_e \sqrt{\varepsilon_1} \sin \Phi \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(x \sin \Phi + z \cos \Phi - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, t\right).$$

Nennen wir nun Φ_1 den Winkel, den der reflektierte Strahl mit der Normalen bildet, so haben wir im ersten Medium noch eine Lichtbewegung, die dargestellt wird durch (der Index r möge sich auf den reflektierten Strahl beziehen)

$$E_{r_x} = B_r \cos \Phi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \Phi_1 + z \cos \Phi_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t \right),$$

$$E_{r_y} = A_r \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \Phi_1 + z \cos \Phi_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t \right),$$

$$E_{r_z} = - B_r \sin \Phi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \Phi_1 + z \cos \Phi_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t \right)$$

und

$$H_{r_x} = - A_r \sqrt{\varepsilon_1} \cos \Phi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \Phi_1 + z \cos \Phi_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t \right),$$

$$H_{r_y} = B_r \sqrt{\varepsilon_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \Phi_1 + z \cos \Phi_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t \right),$$

$$H_{r_z} = A_r \sqrt{\varepsilon_1} \sin \Phi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \Phi_1 + z \cos \Phi_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t \right).$$

Im zweiten Medium haben wir allein den durchgehenden Strahl (Index d), nennen wir den Winkel, den dieser mit der Normalen einschließt, ϑ, so gilt:

$$E_{d_x} = B_d \cos \vartheta \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right),$$

$$E_{d_y} = A_d \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right),$$

$$E_{d_z} = - B_d \sin \vartheta \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right)$$

und

$$H_{d_x} = - A_d \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right),$$

$$H_{d_y} = B_d \sqrt{\varepsilon_2} \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right),$$

$$H_{d_z} = A_d \sqrt{\varepsilon_2} \sin \vartheta \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right).$$

Nach unseren Grenzbedingungen muß nun unabhängig von x und t für $z = 0$ gelten

$$\left.\begin{aligned} E_{e_x} + E_{r_x} &= E_{d_x}, \quad E_{e_y} + E_{r_y} = E_{d_y} \\ H_{e_x} + H_{r_x} &= H_{d_x}, \quad H_{e_y} + H_{r_y} = H_{d_y} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Betrachten wir zunächst eine der Gleichungen für sich allein, z. B. die zweite, so wird diese:

$$A_e \cos \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(x \sin \Phi - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t\right) + A_r \cos \frac{2\pi}{\lambda_r}\left(x \sin \Phi_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t\right) =$$

$$= A_d \cos \frac{2\pi}{\lambda_d}\left(x \sin \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t\right). \tag{11}$$

Damit diese Gleichung für alle Werte von t gelten kann, muß zunächst sein:

$$\lambda_e \sqrt{\varepsilon_1} = \lambda_r \sqrt{\varepsilon_1} = \lambda_d \sqrt{\varepsilon_2},$$

also

$$\lambda_e = \lambda_r \text{ und } \frac{\lambda_e}{\lambda_d} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{12}$$

Die Wellenlänge ist also für die beiden Strahlen im ersten Medium die gleiche, während die Wellenlängen in den zwei verschiedenen Medien sich wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verhalten (hieraus folgt, daß die Schwingungszeiten gleich sind).

Da die Gleichung (11) auch für alle x gelten muß, so folgt ferner

$$\sin \Phi = \sin \Phi_1 = \frac{\lambda_e}{\lambda_d} \sin \vartheta. \tag{13}$$

Die erste Bedingung sagt aus, da Φ_1 nicht gleich Φ sein kann, $\Phi_1 = \pi - \Phi$; das ist das bekannte Reflexionsgesetz. Die zweite drückt das Snelliussche Brechungsgesetz aus: $\frac{\lambda_e}{\lambda_d} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ gibt den Brechungsindex an.

Das gleiche Resultat hätten wir ebensogut aus jeder anderen der drei Gleichungen (10) ableiten können. Ferner ergeben die Gleichungen, wenn wir bedenken, daß $\cos \Phi_1 = -\cos \Phi$ ist

$$B_e \cos \Phi - B_r \cos \Phi = B_d \cos \vartheta$$
$$- A_e \sqrt{\varepsilon_1} \cos \Phi + A_r \sqrt{\varepsilon_1} \cos \Phi = - A_d \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta,$$
$$A_e + A_r = A_d$$
$$B_e \sqrt{\varepsilon_1} + B_r \sqrt{\varepsilon_1} = B_d \sqrt{\varepsilon_2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$A_r \left(\cos \Phi + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \vartheta \right) = A_e \left(\cos \Phi - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \vartheta \right),$$

$$A_d \left(\cos \Phi + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \vartheta \right) = 2 A_e \cos \Phi,$$

$$B_r \left(\cos \vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \Phi \right) = B_e \left(- \cos \vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \Phi \right),$$

$$B_d \left(\cos \vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \Phi \right) = 2 B_e \cos \Phi.$$

Berücksichtigen wir, daß nach (12) und (13)

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\sin \Phi}{\sin \vartheta}$$

ist, so können wir die Gleichungen auch in die Form bringen:

$$A_r \sin (\vartheta + \Phi) = A_e \sin (\vartheta - \Phi),$$
$$A_d \sin (\vartheta + \Phi) = 2 A_e \sin \vartheta \cos \Phi,$$
$$B_r \operatorname{tg} (\vartheta + \Phi) = - B_e \operatorname{tg} (\vartheta - \Phi),$$
$$B_d \sin (\vartheta + \Phi) \cos (\vartheta - \Phi) = 2 B_e \sin \vartheta \cos \Phi. \qquad (14)$$

Dies sind die FRESNELschen Gleichungen, durch die das Verhältnis der Amplitude des reflektierten bzw. des durchgehenden Lichtes zu der des einfallenden Lichtes festgelegt wird.

In der obigen Rechnung ist die Stetigkeit der Normalkomponente von C und B, in unserem Falle also von D und H nicht benutzt. Man überzeuge sich davon, daß die gefundenen Resultate auch diese Bedingungen erfüllen. Daß sie nicht Neues mehr geben können, läßt sich auch schon aus den Grundgleichungen der Theorie ableiten. s sei eine geschlossene Kurve in der Grenzfläche und s_1 und s_2 sei die gleiche Kurve, nur über eine unendlich kleine Strecke in Richtung der Normalen nach dem ersten, bzw. dem zweiten Medium hin verschoben. Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente von E folgt,

daß $\int E_s \, ds$ für s_1 und s_2 den gleichen Wert hat, und aus der zweiten Maxwellschen Gleichung läßt sich herleiten, daß $\int \dot{B}_n \, d\sigma$ für die durch s_1 und s_2 begrenzten ebenen Flächen gleich groß ist. Dies schließt in sich, daß $\dot{B}_n$ und auch B_n stetig sind; für B_n folgt es, weil B_n als einfache periodische Funktion der Zeit ohne konstanten Teil angenommen war. Ebenso birgt die Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Kraft die von C_n in sich.

Wir wollen noch zum Schluß darauf hinweisen, daß wir die Gesetze für die Lichtfortpflanzung in Kristallen erhalten, wenn wir an Stelle der Beziehung $\mathfrak{C} = \varepsilon \dot{\mathfrak{E}}$ die Gleichung (18′) auf S. 64 anwenden, wobei wieder gilt $\mathfrak{C} = \dot{\mathfrak{D}}$.

Namen- und Sachregister.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)

Seite

Äquipotentialflächen 24
Anisotrope Medien. . . 62, 64, 197
Anode 138
Biot und Savart 47
Boltzmann 112
Brechung (des Lichtes) . . . 192
Brechungsgesetz 195
Brechungsindex 195
Coulomb 67
Crémieux 43
Curl (siehe Rotation) . . . 25
Daniell 136
Diamagnetisch 61
Dielektrische Anziehung . . . 112
  Spannung 63
  Verschiebung 63
Dielektrizitätskonstante . . . 64
Divergenz (eines Vektors) . . 14
Edlund 155
Einfallsebene 192
Eisenkern in einer Spule . . . 174
Elektrische Bilder 88
  Kraft 62
  Schwingungen 160
Elektrischer Strom 41
Elektrisches Potential 77
Elektrode 139
Elektrodynamische Kräfte . . 178
Elektromagnetische Einheiten 73
  Lichttheorie 187
Elektromotorische Kraft 67, 119, 122
Elektrostatische Einheiten . . 73
Ellipsoidkondensator 83
Elliptische Scheibe 88
Energie
  allgemeine Gleichung . . 179
  bei stationären Strömen . 135
  im elektrischen Feld 100, 183
  im magnetischen Feld 173, 183
  in einem Solenoid . . . 172
  Minimum-Sätze über die . 102
Energiestrom 183
  in der Nähe einer geladenen Kugel 185

Seite

Extrastrom 146, 155
Faraday 19, 66, 145
Fedderson 161
Ferromagnetisch 61
Frequenz (der Eigenschwingung bei der Entladung eines Kondensators) 160
Fresnel 196
Gauss 10
Gegeninduktion 149
von Geitel 42
Gradient 23
Green 30
Hankel 105
Hauptgleichungen 74
Heaviside 74
Hertz 74, 160, 189
Hutchinson 43
Induktion 144
  bei Bewegung eines Leiters 176
  Gegen- 149
  Selbst- 144
Influenz 90
Induktorium 175
Inversion 94
Isotrope Medien . . . 61, 64, 191
Joule 129
Kapazität 79
Kathode 138
Kelvin 92, 161
Kern (in einer Spule) . . 172, 174
Kirchhoff 92, 126, 157
Koeffizient der Gegeninduktion 150
  zwischen den Polen eines Induktors 175
  der Selbstinduktion . . . 144
  einer Spule 169, 173
Kondensator
  Ellipsoid- 83
  Kugel- 81
  Ladung eines 159
  Platten- 82
Kräftepaar 4

	Seite
Kugelförmiger Leiter	79
Laplace	28
Leitvermögen (spezifisches)	119, 142
Lichtvektor	189
Linienintegral	7
Magnetische Doppelschicht	45
Hysteresis	62
Induktion	59
Kraft	43, 44, 59
Permeabilität	61
Magnetisches Potential	45
Magnetisierung	57
Maxwell	41, 92, 189
erste Gleichung von	53, 74
zweite Gleichung von	66, 74
Monochromatisches Licht	192
Newton	28
Nobili	143
Oberflächenintegral	8
Oerstedt	42
Offener Eisenring	174
Ohm	121
Ostwald	105
Oszillator (Hertzscher)	160
Paramagnetisch	61
Peltier	135
Permanente Magneten	62
Poisson	37, 92
Polarisiertes Licht	191
Ponderomotorische Kräfte	105
Potential eines Vektors	23
elektrisches	77
magnetisches	45
Newtonsches	29
Potentialsprung (an Kontaktstellen)	121
Poynting	184
Raumintegral	10
Reflexion	192
Remanenter Magnetismus	62
Resultante	2
Reziprozitätsgesetz in der Elektrostatik	117
Reziprozitätsgesetz in einem Leitersystem	128
Richtungslinien	17
Rotation der elektrischen Kraft	67
der magnetischen Kraft	51
des Vektorpotentials	51
eines Vektors	25
Rowland	43
Savart	47
Schwefelkugel	112
Schwingungen (freie und erzwungene)	165, 167
Selbstinduktion	144
Skalare Größe	1
Skalares Produkt	2
Snellius	195
Solenoid, gerades	169
ringförmiges	173
Solenoidaler Vektor	18
Spezifisches Induktionsvermögen	80
Spule, gerade	169
ringförmige	173
Stokes	26
Superpositionsgesetz	79
Suszeptibilität	61
Thomson	135
Transatlantisches Kabel	125
Transversalwellen	190
Vektor	1
Vektorpotential	50
Vektorprodukt	3
Verschiebungsstrom	42, 64
Wärmeentwicklung	129
Wechselbeziehung bei einem Leitersystem	128
in der Elektrostatik	117
Wechselstrom	148, 164
Wellenfront	188
Wheatstone	126, 156
Widerstand	122
spezifischer	63, 119

Vorlesungen über theoretische Physik an der Universität Leiden

Von H. A. Lorentz

1. Band: Theorie der Strahlung. Bearbeitet von Prof. Dr. A. D. Fokker. Nach der 2. holl. Auflage ins Deutsche übersetzt von Dr. G. L. de Haas-Lorentz. X und 81 Seiten mit 17 Abb. Geb. M. 7.80

2., 3. Band: Kinetische Probleme. Bearbeitet von Dr. E. D. Bruins und Dr. J. Rendler. Übersetzt von Dr. G. L. de Haas-Lorentz. VI und 134 Seiten mit 23 Abb.
Äthertheorien und Äthermodelle. Bearbeitet von Prof. D. H. Bremerkamp. IV und 78 Seiten mit 19 Abb. Geh. M. 17.—, geb. M. 18.—

4. Band: Die Relativitätstheorie für gleichförmige Translationen. Bearbeitet von Prof. Dr. A. D. Fokker. Übersetzt von Stücklen. X und 180 Seiten mit 12 Abb. Brosch. M. 12.—, geb. M. 13.80

Statistische Mechanik

Von R. H. Fowler
Trinity College, Cambridge

Mit Bewilligung des Verfassers übertragen und teilweise bearbeitet von
O. Halpern und H. Smereker
New York Wien

VI und 594 Seiten mit 17 Abb. Preis M. 34.—, Lw. M. 36.—
(Mathematik in Einzeldarstellungen, Band 8)

Die Fowlersche „Statistische Mechanik" füllt eine Lücke in der physikalischen Literatur aus, in der bisher ein modernes, zusammenfassendes Lehrbuch der physikalischen Statistik fehlte. Das Werk enthält eine vollständige, kritische Entwicklung der „statistischen Thermodynamik", wobei auf Reinheit der mathematischen Methode ebenso geachtet wurde wie auf steten Zusammenhang mit der Erfahrung. Für den theoretisch interessierten Physiker sei neben der neuen Sattelpunktsmethode besonders auf die umfassende Theorie der Stoßerscheinungen und des Prinzips der mikroskopischen Reversibilität bei mechanischen und optischen Prozessen hingewiesen. Ferner sind noch die statistischen Leistungen der neuen Quantenmechanik in einem besonderen Kapitel ausführlich abgehandelt.

Einführung in die Wellenmechanik

Von Dr. Louis de Broglie
Professor am Institut Henri Poincaré, Paris

Übersetzt von Rudolf Peierls

240 Seiten mit 14 Abb. im Text. Preis M. 11.—, brosch. M. 13.80

... Die Frische und Originalität der Darstellung und die Lebhaftigkeit der Gedankenführung des Buches vereinigen sich in seltener Weise mit der überlegenen Beherrschung des behandelten Stoffes.... Wegen seiner Klarheit und leichten Verständlichkeit kann das Buch auch mit dem Stoffe weniger vertrauten Lesern auf das wärmste empfohlen werden.... *Die Naturwissenschaften*

...It is remarkable for its lucid discussion of the various interpretations of the view which have arisen under the stimulus of the new departures in physics. *Science Progress*

Wellenmechanik

Von Prof. A. Landé, Tübingen

1930. IV und 132 Seiten mit 15 Abb. Preis kart. M. 9.50

... eine vorzügliche Einführung in die moderne wellenmechanische Atomtheorie. Sie halten sich frei von unnötiger Gelehrsamkeit und Belastung durch rechnerische Entwicklungen und behandeln trotzdem neben den allgemeinen Grundlagen die wichtigsten speziellen Beispiele. *Zeitschrift für Kristallographie*

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H. • LEIPZIG

UNIV.-BIBL.
k. IX. 1943.
UPPSALA

1943/990